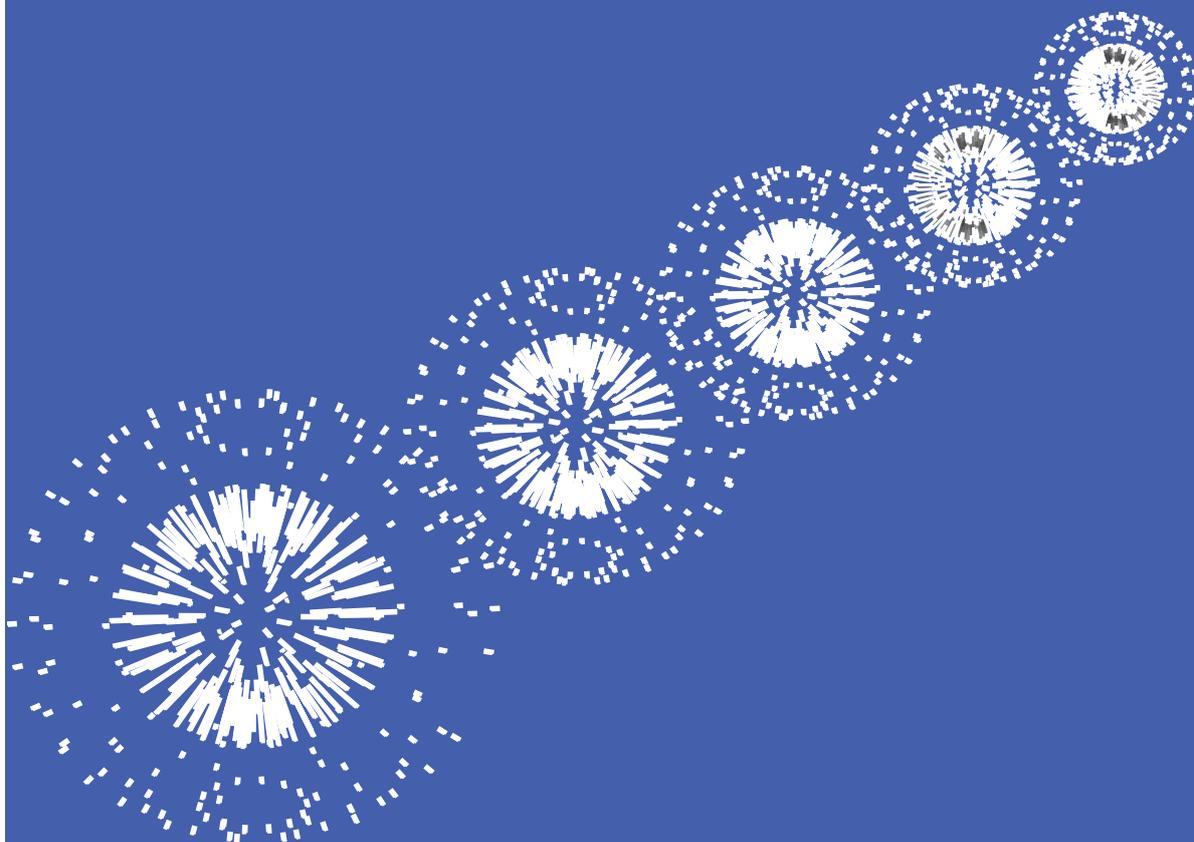


Leibniz Universität Hannover · Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Messtechnik



Formelsammlung  
Grundlagen der Elektrotechnik

H. Haase · H. Garbe



Leibniz Universität Hannover  
Institut für Grundlagen der Elektrotechnik und Messtechnik

**Formelsammlung**  
**Grundlagen der Elektrotechnik**

H. Haase, H. Garbe

Das Werk einschließlich aller Abbildungen ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung der Autoren unzulässig und strafbar. Dies gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Bearbeitung in elektronischen Systemen. Satzherstellung mit  $\text{\LaTeX}$   
© Heyno Garbe, Helmut Haase, 2024

Siebte überarbeitete Auflage, Hyperlink-Version 2024



## **Vorwort**

In dieser Broschüre sind Definitionen und Formeln zur Vorlesung *Grundlagen der Elektrotechnik* an der Leibniz Universität Hannover zusammengestellt. Großes Gewicht ist auf selektive Lesbarkeit und ausreichende Erklärung der Symbole gelegt.

Die neun Kapitel behandeln Felder und Netzwerke. Ein ausführlicher Anhang stellt die häufiger gebrauchten mathematischen Hilfsmittel zusammen. In der Feldtheorie unerlässliche Integral- und Ableitungsoperationen, die dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten, sind koordinatenunabhängig erklärt, wodurch das Wesen der Begriffe deutlicher hervortritt.

Formeln bilden das Gerüst jeder Ingenieurwissenschaft. Trotzdem muss man nur einen kleinen Teil davon auswendig kennen. Wichtiger ist es, die hinter den Formeln stehenden Modelle und Methoden zu beherrschen.

Ob man eine Formel verstanden hat, überprüft man am besten nach einem Gedanken des englischen Physikers P. A. M. Dirac:

„I understand what an equation means if I have a way of figuring out the characteristics of its solution without actually solving it.”

Die Autoren hoffen, dass die Sammlung nicht nur beim Lösen von Aufgaben und Bestehen von Prüfungen hilft, sondern auch über das Studium der Grundlagen der Elektrotechnik hinaus verwertbar bleibt.

Hannover, Oktober 2001

Helmut Haase und Heyno Garbe

## **Vorwort zur siebten Auflage**

Es wurden einige Druckfehler berichtigt. Falls Sie Anregungen zu Form und Inhalt der Sammlung geben möchten oder weitere Fehler erkannt haben, schreiben Sie bitte an [errata@geml.uni-hannover.de](mailto:errata@geml.uni-hannover.de).

Hannover, Oktober 2008

Helmut Haase und Heyno Garbe

## **Letzte Durchsicht Januar 2024**

Falls Sie Anregungen zu Form und Inhalt der Sammlung geben möchten oder weitere Fehler erkannt haben, schreiben Sie bitte an [errata@geml.uni-hannover.de](mailto:errata@geml.uni-hannover.de).

## **Inhaltsverzeichnis**

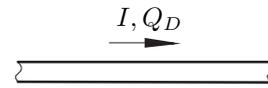
<b>1. Gleichstromnetzwerke</b>	<b>5</b>
<b>2. Elektrostatik</b>	<b>11</b>
<b>3. Stationäres elektrisches Strömungsfeld</b>	<b>19</b>
<b>4. Magnetisches Feld</b>	<b>22</b>
<b>5. Netzwerke mit beliebigem Zeitverlauf von Strom und Spannung</b>	<b>34</b>
<b>6. Periodische und harmonische Größen</b>	<b>36</b>
<b>7. Lineare Netzwerke mit harmonischen Strömen und Spannungen</b>	<b>40</b>
<b>8. Dreiphasensystem mit harmonischen Strömen und Spannungen</b>	<b>48</b>
<b>9. Instationäre Vorgänge in linearen, zeitinvarianten Netzwerken</b>	<b>51</b>
<b>A. Mathematik</b>	<b>54</b>
<b>B. Mechanik</b>	<b>66</b>
<b>C. Wärmelehre</b>	<b>68</b>
<b>D. Tabellen</b>	<b>69</b>
<b>Index</b>	<b>75</b>

# 1. Gleichstromnetzwerke

## 1.1. Strom als Ladungsdurchsatz pro Zeit

$$I = \frac{dQ_D}{dt}$$

$Q_D(t)$  verläuft linear mit der Zeit  $t$ , wenn  $I$  Gleichstrom. Der (Bezugs-)Pfeil legt die Bezugsorientierung fest.



## 1.2. Ladungsdurchsatz

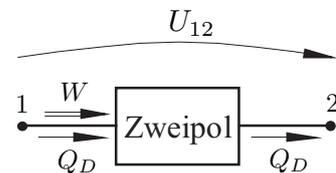
$$Q_D(t) = \int_{t_0}^t I(\tau) d\tau$$

$Q_D$  ist zeitabhängig.  $Q_D(t_0) = 0$ .  $d\tau$ : Zeitinkrement. Wenn  $I$  Gleichstrom:  $Q_D(t) = I(t - t_0)$ .

## 1.3. Spannung eines Zweipols

$$U_{12} = \frac{dW}{dQ_D}$$

$U_{12}$ : Spannung von Klemme 1 nach Klemme 2.  $dW$ : elektrische Energiezufuhr von außen während einer genügend kurzen Zeitspanne.  $dQ_D$ : Ladungsdurchsatz während derselben Zeitspanne



## 1.4. Potenzial

$$\varphi_P = U_{PB} + \varphi_B$$

$P$ : Punkt im Netzwerk.  $B$ : Bezugspunkt im Netzwerk. Das dort herrschende Bezugspotenzial  $\varphi_B$  ist frei wählbar.

## 1.5. Spannung als Potenzialdifferenz

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$U_{12}$ : Spannung von Klemme 1 nach Klemme 2, vgl. 1.3

## 1.6. Widerstand

$$R = \frac{U}{I}$$

Verbraucherpfilsystem (VS) vorausgesetzt, siehe 1.22

## 1.7. Differentieller Widerstand

$$r = \frac{dU}{dI}$$

Verbraucherpfilsystem (VS) vorausgesetzt, siehe 1.22

### 1.8. Leitwert

$$G = \frac{1}{R} = \frac{I}{U} \quad \text{Verbraucherfeilsystem (VS) vorausgesetzt, siehe 1.22}$$

### 1.9. Leistung eines Zweipols

$$P = \frac{dW}{dt} = UI \quad \text{Aufnahme oder Abgabe von Leistung je nach Vorzeichen ihres Werts und Wahl des Bezugssystems (VS oder ES, vgl. 1.22)}$$

### 1.10. Elektrische Energie

$$W_{12} = \int_{t_1}^{t_2} P dt \quad \text{Elektrische Energiezufuhr während } t_1 \leq t \leq t_2. \text{ Wenn } P \text{ konstant: } W_{12} = P(t_2 - t_1)$$

### 1.11. Wirkungsgrad

$$\eta = \frac{P_N}{P_A} = \frac{P_N}{P_N + P_V} \quad P_N: \text{ Nutzleistung. } P_A: \text{ aufgewandte Leistung. } P_V: \text{ Verlustleistung}$$

### 1.12. Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz

$$\sum_{\mu} I_{\mu} = 0 \quad \text{Vom Knotenpunkt abfließende Ströme werden addiert, zufließende Ströme werden subtrahiert (Hüllensumme).}$$

### 1.13. Kirchhoff'scher Maschensatz, Form 1

$$\sum_{\mu} U_{\mu} = 0 \quad \text{Quellen gehen mit ihrer Quellenspannung } U_q \text{ ein. Spannungen mit Bezugspfeil in Umlaufrichtung werden addiert, Spannungen mit Bezugspfeil entgegen der Umlaufrichtung werden subtrahiert (Umlaufsumme).}$$

### 1.14. Kirchhoff'scher Maschensatz, Form 2

$$\sum_{\mu} U_{\mu} = \sum_{\nu} {}^e U_{\nu} \quad \text{Quellen gehen mit ihrer eingepprägten Spannung } {}^e U_{\nu} \text{ ein. Die Umläufe zur Berechnung der linken und der rechten Summe sind gleich zu orientieren. Spannungen mit Bezugspfeil in Umlaufrichtung werden addiert, Spannungen mit Bezugspfeil entgegen der Umlaufrichtung werden subtrahiert. Dasselbe gilt für die eingepprägten Spannungen (Umlaufsummen).}$$

### 1.15. Ohm'sches Gesetz

$$U = RI \quad \text{Verbraucherfeilsystem(VS) vorausgesetzt, siehe 1.22}$$

## 1.16. Widerstand eines stabförmigen Leiters

$$R = \frac{\rho l}{A}$$

$\rho$ : spezifischer Widerstand.  $l$ : Leiterlänge.  $A$ : Leiterquerschnittsfläche. Der Leiter muss gemäß  $l \gg \sqrt{A}$  schlank sein.

## 1.17. Temperatureinfluss auf Widerstand

### 1.17.1. Lineare Näherung

$$R = R_0[1 + \alpha_0(\vartheta - \vartheta_0)]$$

$\vartheta$ : Temperatur.  $R_0 = R(\vartheta_0)$ .  $\alpha_0$ : linearer Widerstands-Temperaturbeiwert zu  $\vartheta_0$ .

### 1.17.2. Quadratische Näherung

$$R = R_0[1 + \alpha_0(\vartheta - \vartheta_0) + \beta_0(\vartheta - \vartheta_0)^2]$$

$\beta_0$ : quadratischer Widerstands-Temperaturbeiwert zu  $\vartheta_0$

## 1.18. Reihenschaltung: Widerstand und Spannungsteilerregel

$$R_{res} = \sum_{\mu} R_{\mu}$$

Durch die Widerstände fließt derselbe Strom.

$$\frac{U_{\nu}}{U_{\mu}} = \frac{R_{\nu}}{R_{\mu}}$$

## 1.19. Parallelschaltung: Leitwert und Stromteilerregel

$$G_{res} = \sum_{\mu} G_{\mu}$$

An den Widerständen liegt dieselbe Spannung.

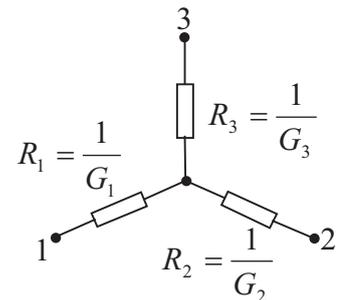
$$\frac{I_{\nu}}{I_{\mu}} = \frac{G_{\nu}}{G_{\mu}}$$

## 1.20. Stern-Dreieck-Umwandlung

### 1.20.1. Vom Dreieck zum Stern

$$R_1 = \frac{R_{12}R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$
$$R_2 = \frac{R_{23}R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$
$$R_3 = \frac{R_{31}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}$$

Das Zielnetzwerk und das Ausgangsnetzwerk haben gleiches Klemmenverhalten.



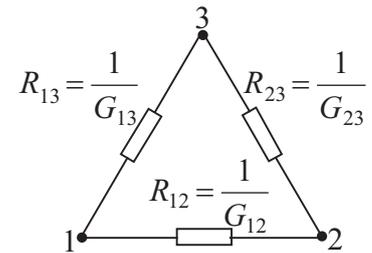
### 1.20.2. Vom Stern zum Dreieck

$$G_{12} = \frac{G_1 G_2}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{23} = \frac{G_2 G_3}{G_1 + G_2 + G_3}$$

$$G_{31} = \frac{G_3 G_1}{G_1 + G_2 + G_3}$$

Das Zielnetzwerk und das Ausgangsnetzwerk haben gleiches Klemmenverhalten.

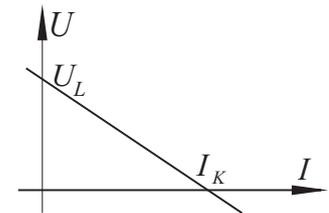


### 1.21. Aktive lineare Zweipole

#### 1.21.1. Kennlinienmodell

$$U = U_L - \frac{U_L}{I_K} I$$

$U$ : Klemmenspannung.  $I$ : Klemmenstrom.  $U_L$ : Leerlaufspannung.  $I_K$ : Kurzschlussstrom. Der Zweipol ist im Erzeugerpeilsystem (ES) beschrieben.



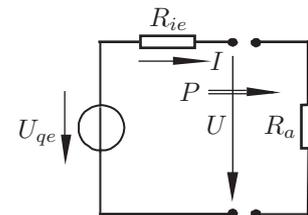
#### 1.21.2. Ersatzspannungsquelle

$$U = U_{qe} - R_{ie} I$$

$$U_{qe} = U_L$$

$$R_{ie} = \frac{U_L}{I_K}$$

$U_{qe}$ : Ersatzquellenspannung.  $R_{ie}$ : Ersatzinnenwiderstand. Der Zweipol ist im Erzeugerpeilsystem (ES) beschrieben.



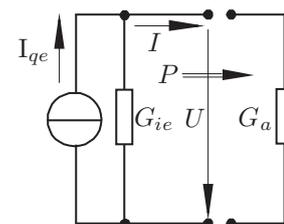
#### 1.21.3. Ersatzstromquelle

$$I = I_{qe} - G_{ie} U$$

$$I_{qe} = I_K$$

$$G_{ie} = \frac{I_K}{U_L} = \frac{1}{R_{ie}}$$

$I_{qe}$ : Ersatzquellenstrom.  $G_{ie}$ : Ersatzinnenleitwert. Der Zweipol ist im Erzeugerpeilsystem (ES) beschrieben.



#### 1.21.4. Leistungsanpassung

$$R_a = R_{ie} \quad \text{oder} \quad G_a = G_{ie} \quad \text{oder} \quad U = \frac{U_L}{2} \quad \text{oder} \quad I = \frac{I_K}{2}$$

Die Bedingungen sind gleichwertig und führen zur maximalen Leistung in der Last  $R_a$  oder  $G_a$ .

### 1.21.5. Überlagerungssatz

$$\Gamma = \sum_{i=1}^n \Gamma_i$$

$\Gamma$ : zu berechnende Netzwerksgröße (Strom, Spannung oder Potential) in einem Netzwerk mit  $n$  Quellen.  $\Gamma_i$ : Wert, den  $\Gamma$  hätte, wenn nur die  $i$ -te Quelle wirkt und die Quellenspannungen und Quellenströme aller anderen  $n - 1$  Quellen auf den Wert null eingestellt sind. Die  $\Gamma_i$  sind mit den üblichen Netzwerkmethoden zu berechnen. Anwendbar nur auf lineare Probleme!

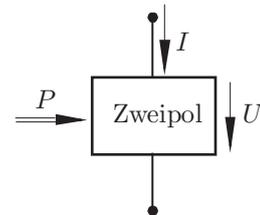
### 1.22. Bezugspfeilsysteme für Zweipole (ZP)

Die beiden folgenden Bilder definieren die Koordination der Bezugspfeile (Zählpfeile) für das jeweilige Pfeilsystem.

#### 1.22.1. Verbraucherpfeilsystem (VS)

Bezugspfeile von  $U$  und  $I$  sind gleich orientiert. Leistung  $P = UI$  zählt als Leistungsaufnahme.

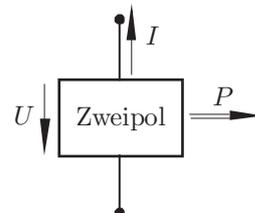
Wenn  $\left\{ \begin{array}{l} UI > 0, \\ UI < 0, \end{array} \right.$  dann ist ZP  $\left. \begin{array}{l} \text{Verbraucher} \\ \text{Erzeuger} \end{array} \right\}$ .



#### 1.22.2. Erzeugerpfeilsystem (ES)

Bezugspfeile von  $U$  und  $I$  sind entgegengesetzt orientiert. Leistung  $P = UI$  zählt als Leistungsabgabe.

Wenn  $\left\{ \begin{array}{l} UI > 0, \\ UI < 0, \end{array} \right.$  dann ist ZP  $\left. \begin{array}{l} \text{Erzeuger} \\ \text{Verbraucher} \end{array} \right\}$ .



#### 1.22.3. Bezugssinn und Richtungssinn

Der *Bezugssinn* einer skalaren Größe (Strom, Ladungsdurchsatz, Spannung, Leistung, Energie u. v. a.) ist durch Wahl des Bezugspfeils (Zählpfeils) willkürlich festlegbar. Wenn der *physikalische Richtungssinn* (=positiver konventioneller Richtungssinn) mit dem Bezugssinn übereinstimmt, ist der Wert der Größe positiv; bei negativem Wert ist ihr physikalischer Richtungssinn dem Bezugssinn entgegengesetzt.

#### 1.22.4. Orientierung und Richtung

Wird für eine Netzwerkmasche, einen Weg oder eine Kurve ein Durchlaufsinne ausgezeichnet, so heißt dieser (positive) *Orientierung*. Der entgegengesetzte Durchlaufsinne heißt negative Orientierung. Dagegen abzugrenzen ist die *Richtung* eines Vektors.

## 2. Elektrostatik

### 2.1. Ladung eines Raumgebietes (wahre Ladung)

$$Q = Q_+ + Q_- \quad \begin{array}{l} Q_+: \text{positive Ladung } (Q_+ > 0, \text{ z. B. positive Ionen}) \\ Q_-: \text{negative Ladung } (Q_- < 0, \text{ z. B. Elektronen}) \end{array}$$

### 2.2. Ladungsverteilungen

#### 2.2.1. Punktladung

$$Q_P, q \quad \text{In einem Punkt konzentrierte Ladung}$$

#### 2.2.2. Raumladungsdichte und Raumladung

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$
$$Q = \int_{\mathcal{V}} \rho dV \quad \begin{array}{l} \mathcal{V}: \text{Ladungsgebiet. } \rho: \text{Raumladungsdichte. } dQ: \\ \text{Ladungselement. } dV: \text{Volumenelement. } Q: \text{Raumladung} \end{array}$$

#### 2.2.3. Flächenladungsdichte und Flächenladung

$$\sigma = \frac{dQ}{dA}$$
$$Q = \int_{\mathcal{A}} \sigma dA \quad \begin{array}{l} \mathcal{A}: \text{Ladungsfläche. } \sigma: \text{Flächenladungsdichte. } dQ: \text{Ladungselement. } dA: \text{Flächenelement. } Q: \text{Flächenladung} \end{array}$$

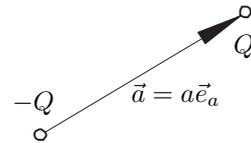
#### 2.2.4. Linienladungsdichte und Linienladung

$$\lambda = \frac{dQ}{ds}$$
$$Q = \int_{\mathcal{S}} \lambda ds \quad \begin{array}{l} \mathcal{S}: \text{Ladungslinie. } \lambda: \text{Linienladungsdichte. } dQ: \text{Ladungselement. } ds: \text{Linienelement. } Q: \text{Linienladung} \end{array}$$

## 2.3. Elektrischer Dipol

### 2.3.1. Dipolmoment bei endlichem Ladungsabstand

$$\vec{p} = Q\vec{a} \quad \begin{array}{l} \vec{a}: \text{Versatz der mit } Q \text{ bezeichneten Ladung gegen die mit } -Q \text{ bezeichnete. } \vec{e}_a: \text{Einheitsvektor von } \vec{a} \end{array}$$



### 2.3.2. Dipolmoment eines Punktdipols

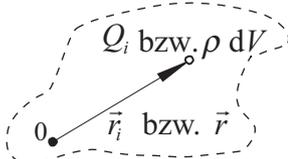
$$\vec{p} = \lim_{\substack{a \rightarrow 0 \\ Q \rightarrow \infty}} Q\vec{a} \quad \begin{array}{l} a \text{ und } Q \text{ gehen bei } \vec{e}_a = \textit{konst} \text{ gleichzeitig so gegen } 0 \\ \text{bzw. } \infty, \text{ dass } \vec{p} \text{ seinen Wert beibehält. } \vec{e}: \text{Einheitsvektor von } \vec{a} \end{array}$$

### 2.3.3. Dipolmoment einer elektrisch neutralen Ladungsverteilung

$$\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{r}_i$$

$$\vec{p} = \int_{\mathcal{V}} \vec{r} \rho dV$$

Den Ursprung 0 des Ortsvektors  $\vec{r}_i$  bzw.  $\vec{r}$  zweckmäßig in die Gegend des Ladungssystems legen! Die Ladungsverteilung muss ganz im Endlichen liegen.  $\mathcal{V}$ : Ladungsgebiet



### 2.4. Elektrische Polarisation

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV}$$

$d\vec{p}$ : Dipolmoment im Volumenelement  $dV$

### 2.5. Elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

$\vec{F}$ : Kraft auf die Punktladung  $q$ .

### 2.6. Elektrische Flussdichte

#### 2.6.1. Darstellung mit Polarisation

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

$\vec{P}$  ist von  $\vec{E}$  abhängig.  $\epsilon_0$ : elektrische Feldkonstante.  $\vec{D}$  wird auch als elektrische Erregung oder elektrische Verschiebung (displacement) bezeichnet.

#### 2.6.2. Darstellung mit elektrischer Suszeptibilität

$$\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_e) \vec{E}$$

$\chi_e$ : elektrische Suszeptibilität.  $\vec{P} \sim \vec{E}$  entspricht  $\chi_e = \text{konst.}$

#### 2.6.3. Darstellung mit relativer Permittivität

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} = \epsilon \vec{E}$$

$\epsilon$ : elektrische Permittivität.  $\epsilon_r$ : relative elektrische Permittivität.  $\vec{P} \sim \vec{E}$  entspricht  $\epsilon_r = \text{konst.}$

#### 2.6.4. Permittivität und Suszeptibilität

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

Die relative elektrische Permittivität  $\epsilon_r$  und die elektrische Suszeptibilität  $\chi_e$  sind Stoffwerte.

## 2.7. Spannung

### 2.7.1. Definition

$$U_{12} = \int_{S_{12}} \vec{E} d\vec{s}$$

$U_{12}$ : Spannung längs des Weges  $S_{12}$ , der von Punkt 1 nach Punkt 2 führt. Im elektrostatischen Feld hängt sie nicht vom Verlauf des Weges, sondern nur von der Lage seines Anfangs- und Endpunkts ab.

### 2.7.2. Potenzial und Spannung

$$\varphi_1 = U_{1B} + \varphi_B$$

$\varphi_1$ : Potenzial in Punkt 1.  $B$ : Bezugspunkt.  $\varphi_B$ : Bezugspotenzial. Meistens wird  $\varphi_B = 0$  gesetzt.

### 2.7.3. Spannung als Potentialdifferenz

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$$

$\varphi_{1,2}$ : Potenziale in den Punkten 1,2. Identisch mit 1.5

## 2.8. Elektrische Energie

$$W_{12} = qU_{12}$$

$W_{12}$ : Arbeit, die das  $\vec{E}$ -Feld an der Punktladung  $q$  auf dem Weg von 1 nach 2 verrichtet

## 2.9. Elektrischer Fluss

$$\Psi = \int_A \vec{D} d\vec{A}$$

$A$ : orientierte Bilanzfläche, durch die der Fluss tritt.  $d\vec{A}$ : vektorielles Flächenelement

## 2.10. Ladungserhaltungssatz der Elektrostatik

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$$

$V$ : Bilanzvolumen.  $\rho$ : Raumladungsdichte, siehe 2.2.2

## 2.11. Wirbelfreiheit des elektrostatischen Felds

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = 0$$

gilt für das  $\vec{E}$ -Feld beliebiger ruhender Ladungsverteilungen und für beliebige Umlaufwege  $\partial A$ . Oben: Integralform, unten: Differentialform

$$\text{rot} \vec{E} = 0$$

## 2.12. Gauß'scher Satz

$$\oint_{\partial V_G} \vec{D} d\vec{A} = \int_G dQ$$

$G$ : Ladungsgebiet.  $\partial V_G$ : Hülle um Ladungsgebiet. Bei Raumladung:  $dQ = \rho dV$ , bei Flächenladung:  $dQ = \sigma dA$ , bei Linienladung:  $dQ = \lambda ds$ . Das  $\vec{D}$ -Feld ist ein Quellfeld. Gilt auch für bewegte Ladungen. Oben: Integralform, unten: Differentialform. **Grundgleichung**

$$\text{div} \vec{D} = \rho.$$

## 2.13. Feldeigenschaften an Permittivitäts-Grenzflächen

### 2.13.1. Tangentialkoordinate der elektrischen Feldstärke

$$E_{t1} = E_{t2} \quad E_{t1,2}: \text{Tangentialkoordinaten der elektrischen Feldstärken } \vec{E}_{1,2} \text{ an der Grenzfläche}$$

### 2.13.2. Normalkoordinate der elektrischen Flussdichte bei ladungsfreier Grenzfläche

$$D_{n1} = D_{n2} \quad D_{n1,2}: \text{Normalkoordinaten der elektrischen Flussdichten } \vec{D}_{1,2} \text{ an der Grenzfläche}$$

### 2.13.3. Normalkoordinate der elektrischen Flussdichte bei ladungsbehafteter Grenzfläche

$$D_{n2} - D_{n1} = \sigma \quad D_{n1,2}: \text{Normalkoordinaten der elektrischen Flussdichten } \vec{D}_{1,2} \text{ an der Grenzfläche. Koordinatenachse von Stoff 1 nach Stoff 2 orientiert. } \sigma: \text{Flächenladungsdichte auf der Grenzfläche}$$

### 2.13.4. Brechungsgesetz bei ladungsfreier Grenzfläche

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \quad \alpha_{1,2}: \text{Winkel zwischen } \vec{E}_{1,2} \text{ und Grenzflächennormalen. } \varepsilon_{1,2}: \text{Permittivitäten von Stoff 1, 2}$$

## 2.14. Felder im Raum mit konstanter Permittivität

### 2.14.1. Elektrische Flussdichte einer Ladungsverteilung (Coulomb-Integral)

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{G}} \frac{dQ}{a^2} \vec{e} \quad \vec{D}: \text{elektrische Flussdichte im Aufpunkt. } \mathcal{G}: \text{Ladungsgebiet. } a\vec{e}: \text{Vektor vom } dQ\text{-Ort zum Aufpunkt; bei Raumladung: } dQ=\rho dV, \text{ bei Flächenladung: } dQ=\sigma dA, \text{ bei Linienladung: } dQ=\lambda ds$$

### 2.14.2. Elektrisches Potenzial einer Ladungsverteilung

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_{\mathcal{G}} \frac{dQ}{a} \quad \varphi: \text{elektrisches Potenzial im Aufpunkt. } \mathcal{G}: \text{Ladungsgebiet. } a: \text{Abstand vom } dQ\text{-Ort zum Aufpunkt; bei Raumladung: } dQ=\rho dV, \text{ bei Flächenladung: } dQ=\sigma dA, \text{ bei Linienladung: } dQ=\lambda ds.$$

### 2.14.3. Elektrische Flussdichte einer Punktladung

$$\vec{D} = \frac{Q}{4\pi a^2} \vec{e} \quad \text{Zentralfeld (räumliches Radialstrahlenfeld) mit der Punktladung } Q \text{ im Zentrum. } a\vec{e}: \text{Vektor von } Q \text{ zum Aufpunkt}$$

#### 2.14.4. Elektrisches Potenzial einer Punktladung

$$\varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon a} \quad a: \text{Abstand von der Punktladung } Q \text{ zum Aufpunkt}$$

#### 2.14.5. Elektrische Flussdichte einer unendlich langen geraden Linienladung

$$\vec{D} = \frac{\lambda}{2\pi a} \vec{e} \quad \text{Zylinderfeld (ebenes Radialstrahlenfeld) mit der Linienladung als Achse. } a\vec{e}: \text{Abstandsvektor von Linienladung zum Aufpunkt. } \lambda: \text{konstante Linienladungsdichte}$$

#### 2.14.6. Elektrische Flussdichte einer unendlich ausgedehnten ebenen Flächenladung

$$\vec{D} = \frac{\sigma}{2} \vec{e} \quad \text{Homogenes Feld beiderseits der geladenen Ebene. } \vec{e}: \text{Einheitsnormalenvektor von Ebene zum Aufpunkt. } \sigma: \text{konstante Flächenladungsdichte}$$

#### 2.14.7. Elektrische Flussdichte und Potenzial eines Punktdipols

$$\vec{D} = \frac{-\vec{p} + 3(\vec{p}\vec{e})\vec{e}}{4\pi a^3} \quad \vec{p}: \text{Dipolmoment. } a\vec{e}: \text{Abstandsvektor vom Dipol zum Aufpunkt. Die Gleichung gilt auch für das Fernfeld von Dipolen mit endlichem Ladungsabstand.}$$
$$\varphi = \frac{\vec{p}\vec{e}}{4\pi\epsilon a^2}$$

#### 2.14.8. Elektrisches Potenzial eines polarisierten Körpers

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{P}d\vec{A}}{a} - \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{div}\vec{P}}{a} dV \right)$$

$\partial\mathcal{V}$ : Körperoberfläche.  $\mathcal{V}$ : Körpergebiet.  $a$ : Abstand vom Flächen- bzw. Volumenelement zum Aufpunkt

### 2.15. Polarisations-Ladungsdichten

#### 2.15.1. Polarisations-Flächenladungsdichte

$$\sigma_P = \vec{P}\vec{e}_n = P_n \quad \vec{P}: \text{Polarisation an der Körperoberfläche. } \vec{e}_n: \text{äußerer Normaleneinheitsvektor des Oberflächenelements}$$

#### 2.15.2. Polarisations-Raumladungsdichte

$$\rho_P = -\text{div}\vec{P} \quad \text{Bei homogen polarisiertem Körper gilt } \rho_P = 0.$$

### 2.16. Elektrische Feldstärke aus elektrischem Potenzial

#### 2.16.1. Koordinate

$$E_s = -\frac{d\varphi}{ds} \quad E_s: s\text{-Koordinate der elektrischen Feldstärke } \vec{E}$$

### 2.16.2. Vektor

$\vec{E} = -\text{grad}\varphi$        $\vec{E}$  steht senkrecht auf Äquipotenzialflächen und zeigt zum niederen Potenzial  $\varphi$ .

## 2.17. Kondensatoren

### 2.17.1. Kapazität

$C = \frac{Q_1}{U_{12}} = \frac{Q_2}{U_{21}}$       für Zweielektroden-Anordnung mit  $Q_1 + Q_2 = 0$

### 2.17.2. Kapazität eines Plattenkondensators

$C = \varepsilon \frac{A}{d}$        $d$ : Plattenabstand.     $A$ : Plattenfläche.     $\varepsilon$ : Permittivität des Stoffes zwischen den Platten. Vorausgesetzt ist  $d \ll \sqrt{A}$ .

### 2.17.3. Kapazität eines Zylinderkondensators

$C = 2\pi\varepsilon \frac{l}{\ln \frac{r_a}{r_i}}$        $r_i$ : Innenradius.  $r_a$ : Außenradius.  $l$ : Länge.  $\varepsilon$ : Permittivität des Stoffes zwischen den Elektroden. Vorausgesetzt ist  $l \gg r_i, r_a$ .

### 2.17.4. Kapazität eines Kugelkondensators

$C = 4\pi\varepsilon \frac{r_i r_a}{r_a - r_i}$        $r_i$ : Innenradius.  $r_a$ : Außenradius.  $\varepsilon$ : Permittivität des Stoffes zwischen den Elektroden

### 2.17.5. Parallelschaltung: Kapazität und Ladungsteilerregel

$C_{res} = \sum_{\mu} C_{\mu}$       An den Kondensatoren liegt dieselbe Spannung.

$$\frac{Q_{\nu}}{Q_{\mu}} = \frac{C_{\nu}}{C_{\mu}}$$

### 2.17.6. Reihenschaltung: Kapazität und Spannungsteilerregel

$\frac{1}{C_{res}} = \sum_{\mu} \frac{1}{C_{\mu}}$       Die Kondensatoren tragen die gleiche Ladung.

$$\frac{U_{\nu}}{U_{\mu}} = \frac{C_{\mu}}{C_{\nu}}$$

### 2.17.7. Energieinhalt eines Kondensators

$W = \frac{1}{2}QU$       Vorausgesetzt ist  $C = konst.$ , was einer linearen Ladungs-Spannungs-Kennlinie  $q(u)$  entspricht.

### 2.17.8. Energiedichte des elektrischen Felds

$\frac{dW}{dV} = \frac{1}{2}DE$       Vorausgesetzt ist  $\varepsilon = konst.$ , was einer linearen Flussdichte-Feldstärke-Kennlinie  $d(e)$  entspricht.

## 2.18. Kräfte und Momente

### 2.18.1. Coulomb'sches Gesetz

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Qq}{a^2} \vec{e}_{Qq} \quad \vec{F}_q: \text{Kraft auf Punktladung } q \text{ im Feld der Punktladung } Q. \text{ Der Abstandsvektor } a\vec{e}_{Qq} \text{ ist von } Q \text{ nach } q \text{ gerichtet.}$$

### 2.18.2. Kraft auf Punktladung, Coulombkraft

$$\vec{F} = Q\vec{E}$$

### 2.18.3. Kraftdichte in Raumladung

$$\vec{f} = \rho\vec{E} \quad \rho: \text{Raumladungsdichte}$$

### 2.18.4. Kraft auf Punktdipol

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{p}\vec{E}) \quad \vec{p}: \text{Dipolmoment. Wenn } \vec{E} \text{ homogen: } \vec{F} = 0$$

### 2.18.5. Drehmoment auf Punktdipol

$$\vec{M} = \vec{p} \times \vec{E} \quad \vec{p}: \text{Dipolmoment}$$

### 2.18.6. Kraft auf Grenzflächen

#### Kraft auf Elektrode

$$\vec{F} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{f} dA \quad \text{mit} \quad \vec{f} = \frac{DE}{2} \vec{e}_n$$

$\partial\mathcal{V}$ : Elektrodenoberfläche.  $\vec{f}$ : elektrische Flächenkraftdichte.  $dA$ : skalares Flächenelement der Elektrodenoberfläche.  $D$  und  $E$ : Beträge der elektrischen Flussdichte und Feldstärke im Dielektrikum direkt an der Elektrode.  $\vec{e}_n$ : äußerer Normalen-Einheitsvektor des Elektroden-Oberflächenelementes

#### Kraft auf Permittivitäts-Grenzfläche

$$\vec{F} = \int_A \vec{f} dA \quad \text{mit} \quad \vec{f} = \left[ \frac{D_n^2}{2} \left( \frac{1}{\epsilon_2} - \frac{1}{\epsilon_1} \right) + \frac{E_t^2}{2} (\epsilon_1 - \epsilon_2) \right] \vec{e}_n$$

$A$ : Grenzfläche.  $\vec{f}$ : elektrische Flächenkraftdichte.  $dA$ : skalares Flächenelement der Grenzfläche.  $D_n$  und  $E_t$ : Normalkoordinate der elektrischen Flussdichte bzw. Tangentialkoordinate der elektrischen Feldstärke an der Grenzfläche.  $\epsilon_{1,2}$ : Permittivitäten.  $\vec{e}_n$ : Normalen-Einheitsvektor des Grenzflächenelementes, von Stoff 1 nach Stoff 2 orientiert

### 2.18.7. Maxwell'sche Spannungen im elektrostatischen Feld

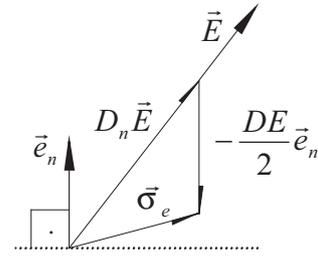
#### Feldspannungsvektor

$$\vec{\sigma}_e = D_n \vec{E} - \frac{DE}{2} \vec{e}_n$$

mit

$$D_n = \vec{D} \vec{e}_n$$

$\vec{e}_n$ : Normaleneinheitsvektor des Flächenelements, für das die Maxwell'sche Spannung gilt. Seine Orientierung ist wählbar.  $\vec{E}$  halbiert den Winkel zwischen  $\vec{e}_n$  und  $\vec{\sigma}_e$



#### Betrag des Feldspannungsvektors

$$\sigma_e = \frac{DE}{2}$$

$E, D$ : Beträge der elektrischen Feldstärke bzw. Flussdichte

#### Feldspannungsvektor, wenn Feld normal zum Flächenelement

$$\vec{\sigma}_e = \frac{DE}{2} \vec{e}_n$$

$\vec{\sigma}_e$  liefert fiktive Normal-Zugkraft auf das Flächenelement (Zug längs  $\vec{e}_n$ ).

#### Feldspannungsvektor, wenn Feld parallel zum Flächenelement

$$\vec{\sigma}_e = -\frac{DE}{2} \vec{e}_n$$

$\vec{\sigma}_e$  liefert fiktive Normal-Druckkraft auf das Flächenelement (Druck entgegen  $\vec{e}_n$ ).

#### Kraft auf Objekt in Bilanzhülle

$$\vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{\sigma}_e dA$$

$\partial V$ : Bilanzhülle, die Objekt vollständig umschließt.  
 $dA$ : skalares Flächenelement der Hülle

### 2.18.8. Kraft nach der Methode der virtuellen Verschiebung

$$F_s = - \left. \frac{dW_e}{ds} \right|_{s_0} + \left. \frac{dW_{\dot{u}}}{ds} \right|_{s_0}$$

$F_s$ :  $s$ -Koordinate der Kraft auf Objekt in Bilanzhülle.  
 $ds$ : virtuelle Verschiebung des Objekts in Richtung der  $s$ -Achse.  $dW_e$ : Erhöhung der Feldenergie nach der Verschiebung um  $ds$ .  $dW_{\dot{u}}$ : Eintragung weiterer Energien in die Bilanzhülle (außer der Verschiebungsarbeit und der Feldenergie) in Folge der Verschiebung.  $s_0$ : Positionskoordinate des unverschobenen Objekts

### 3. Stationäres elektrisches Strömungsfeld

#### 3.1. Driftladungsdichte

$$\rho_D = \frac{dQ_D}{dV}$$

$Q_D$ : Driftladung, d. h. Menge der frei beweglichen Ladungen, nicht zu verwechseln mit wahrer Ladung nach 2.1

#### 3.2. Elektrische Stromdichte

$$\vec{S} = \rho_D \vec{v}_D$$

$\rho_D$ : Driftladungsdichte.  $\vec{v}_D$ : mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger, Driftgeschwindigkeit

#### 3.3. Elektrische Stromstärke

$$I = \int_A \vec{S} d\vec{A}$$

$A$ : Durchtrittsfläche des Stromes.  $d\vec{A}$ : Element der Durchtrittsfläche. Orientierung von  $d\vec{A}$  wählbar wie bei Bezugspfeil

#### 3.4. Normalkoordinate der elektrischen Stromdichte

$$S_n = \frac{dI}{dA}$$

$dI$ : Strom durch das zur  $n$ -Achse normale Flächenelement  $dA$

#### 3.5. Spezifischer elektrischer Widerstand

$$\rho = \frac{E}{S}$$

$E, S$ : Beträge der elektrischen Feldstärke bzw. Stromdichte

#### 3.6. Elektrische Leitfähigkeit

$$\kappa = \frac{S}{E}$$

$E, S$ : Beträge der elektrischen Feldstärke bzw. Stromdichte

#### 3.7. Spezifischer elektrischer Widerstand und Leitfähigkeit

$$\rho\kappa = 1$$

Spezifischer elektrischer Widerstand  $\rho$  und Leitfähigkeit  $\kappa$  sind zueinander reziprok.

#### 3.8. Ohm'sches Gesetz

$$\vec{E} + {}^e\vec{E} = \rho\vec{S}$$

$\vec{E}$ : Elektrische Feldstärke,  ${}^e\vec{E}$ : Eingeprägte elektrische Feldstärke einer Quelle,  $\rho$ : Spezifischer elektrischer Widerstand,  $\vec{S}$ : Stromdichte

### 3.9. Eingeprägte Spannung und Quellenspannung

$${}^e U = \int_{{}^e S} {}^e \vec{E} d\vec{s} \quad {}^e \vec{E}: \text{Eingeprägte elektrische Feldstärke der Quelle, } {}^e S \text{ und } S_q: \text{Weg von Klemme zu Klemme durch die Quelle, orientiert wie Bezugspfeil von } {}^e U \text{ bzw. } U_q$$

bzw.

$$U_q = \int_{S_q} - {}^e \vec{E} d\vec{s}$$

### 3.10. Elektrischer Widerstand

$$R = \frac{U}{I} \quad U \text{ und } I \text{ gemäß VS koordiniert}$$

### 3.11. Elektrischer Leitwert

$$G = \frac{I}{U} \quad U \text{ und } I \text{ gemäß VS koordiniert}$$

### 3.12. Elektrischer Widerstand und Leitwert

$$RG = 1 \quad \text{Elektrischer Widerstand } R \text{ und Leitwert } G \text{ sind zueinander reziprok.}$$

### 3.13. Kirchhoff'scher Knotenpunktsatz

$$\oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{S} d\vec{A} = 0 \quad \partial \mathcal{V}: \text{Hülle um Strömungsfeldgebiet. Das elektrische Strömungsfeld ist quellenfrei.}$$

### 3.14. Kirchhoff'scher Maschensatz

$$\oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{E} d\vec{s} = 0 \quad \partial \mathcal{A}: \text{Orientierter Umlaufweg im Strömungsfeld. Das elektrische Strömungsfeld ist wirbelfrei.}$$

### 3.15. Allgemeine Kontinuitätsgleichung

$$\oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{S} d\vec{A} = - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \rho dV \quad \partial \mathcal{V}: \text{Hülle des Raumgebiets. } \mathcal{V}: \text{Volumen des Raumgebiets. Im Allgemeinen ist das } \vec{S}\text{-Feld nicht quellenfrei (z. B. bei Aufladung einer Kondensatorplatte oder bei schnell veränderlichen Feldern).}$$

### 3.16. Feldeigenschaften an Leitfähigkeits-Grenzflächen

#### 3.16.1. Tangentialkoordinate der elektrischen Feldstärke

$$E_{t1} = E_{t2} \quad E_{t1,2}: \text{Tangentialkoordinaten der elektrischen Feldstärken } \vec{E}_{1,2} \text{ an der Grenzfläche}$$

#### 3.16.2. Normalkoordinate der elektrischen Stromdichte

$$S_{n1} = S_{n2} \quad S_{n1,2}: \text{Normalkoordinaten der elektrischen Stromdichten } \vec{S}_{1,2} \text{ an der Grenzfläche}$$

### 3.16.3. Brechungsgesetz

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$$

$\alpha_{1,2}$ : Winkel zwischen  $\vec{E}_{1,2}$  und der Grenzflächennormalen

### 3.17. Analogie zur Elektrostatik

$$CR = \varepsilon \rho$$

oder

$$\frac{C}{G} = \frac{\varepsilon}{\kappa}$$

$R$ : Widerstand einer Zwei-Elektrodenanordnung.  $C$ : Kapazität derselben Elektrodenanordnung, wenn der leitfähige Stoff gegen ein ideales Dielektrikum ausgetauscht ist.

### 3.18. Elektrische Leistungsdichte

$$\frac{dP}{dV} = \rho S^2 = \kappa E^2$$

$E$  und  $S$ : Beträge der elektrischen Feldstärke bzw. Stromdichte im leitfähigen Gebiet

## 4. Magnetisches Feld

### 4.1. Lorentzkraft

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

$Q$ : Punktladung.  $\vec{v}$ : Geschwindigkeit von  $Q$ .  $\vec{B}$ : magnetische Flussdichte.  $\vec{B}$  ist eine kraftnahe Größe und könnte deshalb „magnetische Feldstärke“ heißen. Leider heißt  $\vec{H}$  so. Die Gleichung definiert  $\vec{B}$ .

### 4.2. Magnetisches Dipolmoment (elektrische Größe)

#### 4.2.1. Ebene Leiterschleife

$$\vec{m} = I\vec{A}$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment.  $I$ : Stromstärke.  $\vec{A}$ : Flächenvektor. Bezugspfeil von  $I$  und Orientierung von  $\vec{A}$  rechtshändig koordiniert

#### 4.2.2. Magnetischer Punktdipol

$$\vec{m} = \lim_{\substack{A \rightarrow 0 \\ I \rightarrow \infty}} I\vec{A}$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment.  $A$  und  $I$  gehen bei  $\vec{e}_A = \text{konst}$  gleichzeitig so gegen 0 bzw.  $\infty$ , dass  $\vec{m}$  seinen Wert beibehält.  $\vec{e}_A$ : Einheitsvektor von  $\vec{A}$ . Bezugspfeil von  $I$  und Orientierung von  $\vec{A}$  rechtshändig koordiniert

#### 4.2.3. Allgemeine Leiterschleife

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{r} \times d\vec{s} = I \int_{\mathcal{A}} d\vec{A}$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment.  $\partial\mathcal{A}$ : Kurve der Leiterschleife.  $I$ : Strom der Leiterschleife.  $\vec{r}$ : Ortsvektor des Linienelements  $d\vec{s}$ . Bezugspfeil von  $I$  und Linienelement  $d\vec{s}$  gleich orientiert.  $\mathcal{A}$ : Fläche der Leiterschleife. Orientierungen des Flächenelements  $d\vec{A}$  und des Bezugspfeils vom  $I$  rechtshändig koordiniert

#### 4.2.4. Strömungsgebiet

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \oint_{\mathcal{V}} \vec{r} \times \vec{S} dV$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment.  $\mathcal{V}$ : Volumen des Strömungsgebietes.  $\vec{r}$ : Ortsvektor des Volumenelements  $dV$ .  $\vec{S}$ : Stromdichte

## 4.3. Größen des Magnetfelds

### 4.3.1. Magnetisierung eines Stoffes

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dV}$$

$d\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment im Volumenelement  $dV$  des Stoffes. (Atome als Träger von Kreisströmen)

### 4.3.2. Magnetische Polarisation

$$\vec{J} = \mu_0 \vec{M}$$

Definition der magnetischen Polarisation

#### 4.3.3. Definition der magnetischen Feldstärke

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

$\vec{H}$ : magnetische Feldstärke. Magnetisierung  $\vec{M}$  feldstärkeabhängig.  $\mu_0$ : magnetische Feldkonstante.  $\vec{H}$  wird auch als magnetische Erregung bezeichnet.

#### 4.3.4. Verknüpfung mit magnetischer Suszeptibilität

$$\vec{B} = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H}$$

$\chi_m$ : magnetische Suszeptibilität.  $\vec{M} \sim \vec{H}$  entspricht  $\vec{B} \sim \vec{H}$  und  $\chi_m = konst.$

#### 4.3.5. Verknüpfung mit relativer Permeabilität

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$\mu_r$ : relative Permeabilität, Permeabilitätszahl.  $\vec{M} \sim \vec{H}$  entspricht  $\vec{B} \sim \vec{H}$  und  $\mu_r = konst.$

#### 4.3.6. Magnetische Suszeptibilität und Permeabilität

$$\mu_r = 1 + \chi_m$$

$\mu_r$  und  $\chi_m$  sind Stoffwerte.

#### 4.3.7. Permeabilität

$$\mu = \mu_0 \mu_r = \frac{B}{H}$$

$B, H$ : Beträge der magnetischen Flussdichte bzw. Feldstärke

#### 4.3.8. Differentielle Permeabilität

$$\mu_{diff} = \frac{dB}{dH}$$

Steigung der Magnetisierungskurve  $B(H)$ .  $B, H$ : Beträge der magnetischen Flussdichte bzw. Feldstärke

#### 4.3.9. Magnetischer Fluss

$$\Phi = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

$A$ : Durchtrittsfläche des Flusses.  $d\vec{A}$ : Element der Durchtrittsfläche. Orientierung von  $d\vec{A}$  wählbar, wie bei Bezugspeil

#### 4.3.10. Magnetischer Verkettungsfluss (Spulenfluss)

##### Allgemeiner Fall

$$\Psi = \sum_{\mu=1}^n \Phi_{\mu}$$

$\Psi$ : mit  $n$  Umläufen einer Raumkurve (Windungen einer Spule) verketteter Fluss

##### Gleichförmige Windungen

$$\Psi = n\Phi$$

$n$ : Windungszahl. Voraussetzung:  $\Phi = \Phi_1 = \Phi_2 = \dots \Phi_n$

#### 4.3.11. Magnetisches Vektorpotential

$$\vec{B} = \text{rot} \vec{A}$$

Definition des magnetischen Vektorpotentials  $\vec{A}$ . Seine Rotation ist gleich der magnetischen Flussdichte  $\vec{B}$ .

#### 4.3.12. Magnetisches Skalarpotential

$\vec{H} = -\text{grad}\psi$       Definition des magnetischen Skalarpotentials  $\psi$ . Sein negativer Gradient ist gleich der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}$ .

#### 4.3.13. Magnetische Spannung

$V_{12} = \int_{S_{12}} \vec{H} d\vec{s}$        $V_{12}$ : Magnetische Spannung längs der orientierten Wegkurve  $S_{12}$ . Die magnetische Spannung hängt i. A. vom *Verlauf* des Weges und nicht nur von der Lage seines Anfangs- und Endpunkts 1 bzw. 2 ab.

#### 4.3.14. Magnetisches Skalarpotential und magnetische Spannung

$\psi_1 = V_{1B} + \psi_B$        $\psi_1$ : Potenzial im Aufpunkt 1.  $V_{1B}$ : Magnetische Spannung vom Aufpunkt 1 zum Bezugspunkt  $B$ . Die Mehrdeutigkeit der magnetischen Spannung (Wegabhängigkeit) schränkt die Nützlichkeit des Potenzialbegriffs ein.  $\psi_B$ : Bezugspotenzial, meistens wird  $\psi_B = 0$  gesetzt.

#### 4.3.15. Magnetische Spannung als Potentialdifferenz

$V_{12} = \psi_1 - \psi_2$       Mehrdeutigkeit des Potentials beachten und prüfen, ob die berechnete Potentialdifferenz zu der  $V_{12}$  zugeordneten Wegkurve passt!

### 4.4. Magnetisches Feld im Raum mit konstanter Permeabilität

#### 4.4.1. Formel von Biot und Savart für Strömungsgebiet

$\vec{H} = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{S} \times \vec{e}}{a^2} dV$        $\mathcal{V}$ : Strömungsgebiet.  $\vec{S}$ : Stromdichte im Volumenelement  $dV$ .  $a\vec{e}$ : Abstandsvektor von  $dV$  zum Aufpunkt

#### 4.4.2. Formel von Biot und Savart für Leiterkreis

$\vec{H} = \frac{I}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{A}} \frac{d\vec{s} \times \vec{e}}{a^2}$        $\partial\mathcal{A}$ : Leiterkreiskurve.  $I$ : Strom des Leiterkreises.  $d\vec{s}$ : Linienelement in Leiterlängsrichtung, orientiert wie  $I$ -Bezugspfeil.  $a\vec{e}$ : Abstandsvektor von  $d\vec{s}$  zum Aufpunkt

#### 4.4.3. Magnetische Feldstärke eines langen geraden Leiters mit Kreisquerschnitt

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{r}{R^2} \vec{e}_\varphi \quad \text{für } 0 \leq r \leq R; \quad \vec{H} = \frac{I}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{e}_\varphi \quad \text{für } r \geq R$$

$I$ : Strom.  $r$ : Abstand des Aufpunkts von Leiterachse.  $\vec{e}_\varphi$ : Einheitsvektor in Umfangsrichtung, rechtshändig zum  $I$ -Bezugspfeil orientiert.  $R$ : Leiterradius. Ebenes Feld; die Feldlinien sind konzentrische Kreise um Leiterachse.

#### 4.4.4. Magnetisches Skalarpotenzial einer Linienleiterschleife beliebiger Form

$$\psi = \frac{I}{4\pi} \int_A \frac{\vec{e} d\vec{A}}{a^2}$$

$A$ : Eine Fläche, welche die Leiterschleife als Rand hat.  $a\vec{e}$ : Abstandsvektor vom Flächenelement  $d\vec{A}$  zum Aufpunkt. Orientierungen von  $d\vec{A}$  und des Bezugspfeils des Stroms  $I$  rechtshändig koordiniert.  $\psi$  ist beim Durchtritt durch die Fläche unstetig.

#### 4.4.5. Magnetisches Skalarpotenzial und Feldstärke einer kleinen Leiterschleife

$$\psi = \frac{\vec{m}\vec{e}}{4\pi a^2};$$

$$\vec{H} = \frac{-\vec{m} + 3(\vec{m}\vec{e})\vec{e}}{4\pi a^3}$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment der Leiterschleife.  $a\vec{e}$ : Abstandsvektor von der Leiterschleife zum Aufpunkt. Die Formeln gelten in Näherung für das Fernfeld. Für den magnetischen Punktdipol sind sie überall exakt.

#### 4.4.6. Magnetisches Vektorpotenzial eines Strömungsgebietes

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{S} dV}{a}$$

$\mathcal{V}$ : Strömungsgebiet.  $a$ : Abstand des Aufpunkts vom Volumenelement  $dV$ .  $\mu$ : Permeabilität

#### 4.4.7. Magnetisches Vektorpotenzial einer Leiterschleife

$$\vec{A} = \frac{\mu I}{4\pi} \oint_{\partial A} \frac{d\vec{s}}{a}$$

$\partial A$ : Leiterkreisurve.  $a$ : Abstand des Aufpunkts vom Linienenelement  $d\vec{s}$ .  $\mu$ : Permeabilität

#### 4.4.8. Magnetisches Vektorpotenzial einer kleinen Leiterschleife

$$\vec{A} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{e}}{a^2}$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment der Leiterschleife.  $a\vec{e}$ : Abstandsvektor von der Leiterschleife zum Aufpunkt. Die Formeln gelten in Näherung für das Fernfeld. Für den magnetischen Punktdipol sind sie überall exakt.

#### 4.4.9. Magnetisches Vektorpotenzial eines magnetisierten Körpers

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{M} \times d\vec{A}}{a} + \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{rot}\vec{M}}{a} dV \right)$$

$\partial\mathcal{V}$ : Oberfläche des Körpers.  $\mathcal{V}$ : Volumen des Körpers.  
 $\mu_0$ : magnetische Feldkonstante.  $\vec{M}$ : Magnetisierung.  $a$ :  
 Abstand des äußeren Flächenelements  $d\vec{A}$  bzw. des  
 Volumenelements  $dV$  zum Aufpunkt

#### 4.4.10. Oberflächenstrombelag eines magnetisierten Körpers

$$\vec{C}_m = \vec{M} \times \vec{e}_n$$

$\vec{e}_n$ : Flächennormalen-Einheitsvektor, nach außen ge-  
 richtet.  $\vec{C}_m$  ist Größe zur Beschreibung des Felds eines  
 Permanentmagneten.

#### 4.4.11. Magnetisierungsstromdichte eines magnetisierten Körpers

$$\vec{S}_m = \text{rot}\vec{M}$$

Konstante Magnetisierung  $\vec{M}$  entspricht  $\vec{S}_m = 0$ .  $\vec{S}_m$   
 ist Größe zur Beschreibung des Felds eines Permanent-  
 magneten.

### 4.5. Quellenfreiheit der magnetischen Flussdichte

$$\oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{B} d\vec{A} = 0$$

$\partial\mathcal{V}$ : Beliebige Bilanzhülle. **Grundgleichung.** Oben:  
 Integralform. Unten: gleichwertige Differentialform

$$\text{div}\vec{B} = 0$$

### 4.6. Durchflutungssatz

$$\oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{H} d\vec{s} = \int_{\mathcal{A}} \vec{S} d\vec{A}$$

$\mathcal{A}$ : Durchströmte Fläche.  $\partial\mathcal{A}$ : Rand von  $\mathcal{A}$ .  $\vec{H}$ : ma-  
 gnetische Feldstärke.  $\vec{S}$ : Stromdichte. Orientierungen  
 des Linienelements  $d\vec{s}$  und des (äußeren) Flächene-  
 elements  $d\vec{A}$  rechtshändig koordiniert. Obere Gleich-  
 ung: Integralform. Mittlere Gleichung: Gleichwertige  
 Kurzform. Untere Gleichung: Gleichwertige Diffe-  
 rentialform. **Grundgleichung** mit der Voraussetzung  
 $\left| \frac{d\vec{D}}{dt} \right| \ll \left| \vec{S} \right|$ .

$$\overset{\circ}{V} = \Theta$$

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{S}$$

#### 4.6.1. Magnetische Umlaufspannung

$$\overset{\circ}{V} = \oint_{\partial\mathcal{A}} \vec{H} d\vec{s}$$

$\partial\mathcal{A}$ : Orientierter Umlaufweg, geschlossene Wegkurve.  
 Orientierung freigestellt wie Bezugspfeil

#### 4.6.2. Elektrische Durchflutung

$$\Theta = \int_A \vec{S} d\vec{A} = \sum_{\nu} I_{\nu}$$

$A$ : Durchströmte Fläche.  $\vec{S}$ : Stromdichte.  $d\vec{A}$ : Element der Fläche. Orientierung von  $d\vec{A}$  wählbar, wie bei Bezugspfeil.  $I_{\nu}$ : Ströme, welche die Fläche passieren; Orientierung aller  $I$ -Bezugspfeile gleichsinnig.

#### 4.7. Feldeigenschaften an Permeabilitäts-Grenzflächen

##### 4.7.1. Tangentialkoordinate der magnetischen Feldstärke

$$H_{t1} = H_{t2}$$

$H_{t1,2}$ : Tangentialkoordinaten der magnetischen Feldstärke  $\vec{H}_{1,2}$  an der Grenzfläche zwischen den Stoffen 1 und 2

##### 4.7.2. Normalkoordinate der magnetischen Flussdichte

$$B_{n1} = B_{n2}$$

$B_{n1,2}$ : Normalkoordinaten der magnetischen Flussdichten  $\vec{B}_{1,2}$  an der Grenzfläche

##### 4.7.3. Brechungsgesetz

$$\frac{\tan \alpha_1}{\tan \alpha_2} = \frac{\mu_1}{\mu_2}$$

$\alpha_{1,2}$ : Winkel zwischen  $\vec{B}_{1,2}$  und der Grenzflächennormalen

#### 4.8. Induktionsgesetz

$$\oint_{\partial A} \vec{E} d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

$A$ : Fläche.  $\partial A$ : Rand der Fläche.  $\vec{B}$ : magnetische Flussdichte.  $\vec{E}$ : elektrische Feldstärke (i. A. Wirbel-feld). Orientierung des Linienelements  $d\vec{s}$  mit dem Flächenelement  $d\vec{A}$  rechtshändig koordiniert. **Grundgleichung**

##### 4.8.1. Induzierte Spannung

$$u_i = u_{iT} + u_{iM}$$

$u_{iT}$ : transformatorisch induzierte Spannung.  $u_{iM}$ : motorisch induzierte Spannung.  $u_i$  ist eine eingeprägte Spannung.

##### Transformatorisch induzierte Spannung

$$u_{iT} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A}$$

$A$ : Beliebige Bilanzfläche. Orientierung des Bezugspfeils von  $u_{iT}$  rechtshändig zu  $d\vec{A}$ . Die transformatorisch induzierte Spannung ist eine eingeprägte Spannung.

### Motorisch induzierte Spannung

$$u_{iM} = \oint_{\partial A} \vec{v} \times \vec{B} d\vec{s}$$

$\partial A$ : Beliebiger Bilanzumlaufweg. Bezugspfeil von  $u_{iM}$  orientiert wie  $d\vec{s}$ . Die motorisch induzierte Spannung ist eine eingeprägte Spannung.

### Magnetischer Schwund

$$-\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_A \vec{B} d\vec{A}$$

$A$ : Beliebige Bilanzfläche, i. A. zeitabhängig,  $\Phi$ : magnetischer Fluss

### Flussregel

$$-\frac{d\Phi}{dt} = u_i$$

Die Flussregel gilt, außer wenn  $\int dA$  zeitlich unstetig verläuft. Bezugspfeile von  $\Phi$  und  $u_i$  rechtshändig orientiert

### 4.8.2. Spannungsgleichung für bewegten Leiterkreis mit Spannungsquellen

$$\oint_{\partial A} \rho \vec{S} d\vec{s} - \oint_{\partial A} {}^e \vec{E} d\vec{s} = - \int_A \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} d\vec{A} + \oint_{\partial A} \vec{v} \times \vec{B} d\vec{s} \quad \text{Kurz: } \sum u - \sum {}^e u = u_i$$

$\partial A$ : Leiterkreisurve.  $A$ : Fläche, die  $\partial A$  als Rand hat. Orientierungen von  $d\vec{s}$  und  $d\vec{A}$  sind rechtshändig koordiniert.  $\sum u$ : Umlaufsumme der elektrischen Spannungen (ohne Quellen),  $\sum {}^e u$ : Umlaufsumme der eingepprägten Spannungen der Quellen,  $u_i$ : induzierte Spannung. Im Fall  $\vec{v} = 0$  und  $\partial B / \partial t = 0$ , d. h. im Fall  $u_i = 0$ , bildet die Gleichung den Kirchhoff'schen Maschensatz.

### Elektrische Umlaufspannung

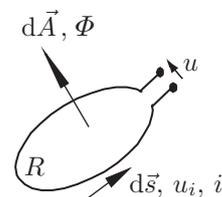
$$\overset{\circ}{u} = \sum u = \oint_{\partial A} \rho \vec{S} d\vec{s}$$

$\partial A$ : Beliebiger Umlaufweg. Die Umlaufspannung erfaßt Spannungen an Widerständen und zwischen Klemmen. Bezugspfeil von  $\overset{\circ}{u}$  wie Linienelement  $d\vec{s}$  orientiert

### Spannungsgleichung mit Strom und Klemmenspannung

$$u + Ri = u_i$$

$u$ : Klemmenspannung.  $R$ : Widerstand der Leiterschleife.  $i$ : Strom. Orientierungen rechtshändig koordiniert und gemäß Erzeugerpfeilsystem



## 4.9. Induktivität

### 4.9.1. Selbstinduktivität einer Spule

$$L = \frac{\Psi(I)}{I}$$

$\Psi$ : durch den Spulenstrom  $I$  erregter Verkettungsfluss.  
Bezugspfeile von  $\Psi$  und  $I$  rechtshändig koordiniert.  
 $L > 0$

### 4.9.2. Gegeninduktivität eines Spulenpaares

#### Gegeninduktivität von Spule 1 gegen Spule 2

$$M_{12} = \frac{\Psi_1(I_2)}{I_2}$$

$\Psi_1(I_2)$ : Verkettungsfluss in Spule 1, der vom Strom  $I_2$  der Spule 2 erregt wird. Die Gegeninduktivität kann negativ sein.

#### Gegeninduktivität von Spule 2 gegen Spule 1

$$M_{21} = \frac{\Psi_2(I_1)}{I_1}$$

$\Psi_2(I_1)$ : Verkettungsfluss in Spule 2, der vom Strom  $I_1$  der Spule 1 erregt wird. Die Gegeninduktivität kann negativ sein.

### 4.9.3. Magnetische Kopplung zweier Spulen

#### Gleichheit der Gegeninduktivitäten

$$M_{12} = M_{21} = M$$

Voraussetzung: lineare Spulenfluss - Strom - Kennlinien

#### Magnetischer Kopplungskoeffizient

$$k = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}}$$

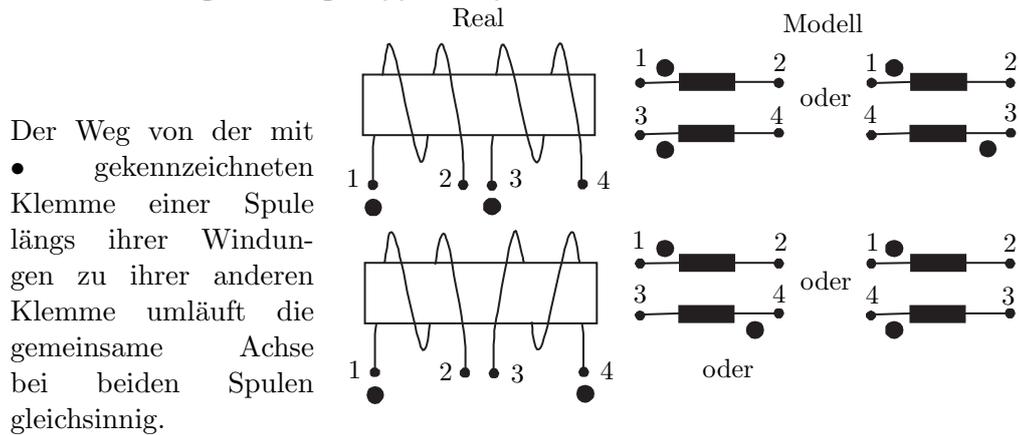
$L_{1,2}$ : Selbstinduktivitäten der magnetisch gekoppelten Spulen 1 und 2

#### Magnetischer Streukoeffizient

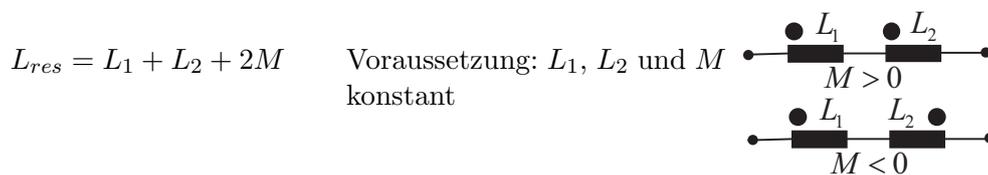
$$\sigma = 1 - k^2$$

$k$ : Kopplungskoeffizient

## Sinnbild für magnetisch gekoppelte Spulen



## Reihenschaltung zweier magnetisch gekoppelter linearer Spulen



## 4.10. Magnetische Netzwerke

### 4.10.1. Knotenpunktsatz

$$\sum_{\mu} \Phi_{\mu} = 0$$

Vom Knotenpunkt abströmende magnetische Flüsse werden addiert, zuströmende werden subtrahiert (Hüllensumme).

### 4.10.2. Maschensatz

$$\sum_{\mu} V_{\mu} = \sum_{\nu} \Theta_{\nu}$$

Linke Seite: Umlaufsumme der magnetischen Spannungen  $V_{\mu}$  der Masche. Rechte Seite: Summe der mit der Masche verketteten elektrischen Durchflutungen  $\Theta_{\nu}$ . Bezugspfeil der Durchflutung rechtshändig zum Umlaufsinn

### 4.10.3. Magnetischer Widerstand und magnetischer Leitwert

#### Definition

$$R_m = \frac{V}{\Phi} = \frac{1}{G_m}$$

$R_m$ : magnetischer Widerstand.  $G_m$ : magnetischer Leitwert.  $V, \Phi$ : Magnetische Spannung bzw. Fluss des Magnetkreisabschnitts

#### Magnetischer Widerstand eines stabförmigen Magnetkreisabschnitts

$$R_m = \frac{l}{\mu A}$$

$l$ : Länge,  $A$ : Querschnittsfläche,  $\mu$ : Permeabilität des Magnetkreisabschnitts

## Verknüpfung von Selbstinduktivität und magnetischem Leitwert

$$L = \frac{n^2}{R_m}$$

$R_m$ : magnetischer Widerstand des Magnetkerns.  
 $n$ : Windungszahl der Spule. Gleicher Fluss in jeder  
Windung vorausgesetzt

### 4.11. Kräfte im Magnetfeld

#### 4.11.1. Kraft auf Punktladung

$$\vec{F} = Q\vec{v} \times \vec{B}$$

$Q$ : Punktladung.  $\vec{v}$ : Geschwindigkeit von  $Q$ .  $\vec{B}$ : mag-  
netische Flussdichte.  $\vec{F}$  heißt Lorentzkraft

#### 4.11.2. Kraftdichte auf Strömungsfeldgebiet

$$\vec{f} = \vec{S} \times \vec{B}$$

$\vec{S}$ : elektrische Stromdichte

#### 4.11.3. Kraft auf stromdurchflossenen ausgedehnten Leiter

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{V}} \vec{S} \times \vec{B} dV$$

$\mathcal{V}$ : Leitervolumen.  $dV$ : Leitervolumenelement. Dort  
herrscht die elektrische Stromdichte  $\vec{S}$  und die magne-  
tische Feldstärke  $\vec{B}$

#### 4.11.4. Kraft auf stromdurchflossenen linienförmigen Leiter

$$\vec{F} = I \oint_{\partial\mathcal{A}} d\vec{s} \times \vec{B}$$

$\partial\mathcal{A}$ : Leiterkurve.  $I$ : Leiterstrom.  $d\vec{s}$ : Linienelement,  
orientiert wie  $I$ -Bezugspfeil

#### 4.11.5. Kraft auf kleine Leiterschleife

$$\vec{F} = \text{grad}(\vec{m} \cdot \vec{B})$$

$\vec{m}$ : magnetisches Dipolmoment. Eine Schleife gilt als  
klein, wenn die Koordinaten des  $\vec{B}$ -Felds in ihrem Be-  
reich praktisch linear mit den Ortskoordinaten variie-  
ren. Formel gilt exakt für magnetischen Punktdipol.

#### 4.11.6. Drehmoment auf Leiterschleife

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$$

$\vec{M}$ : Drehmoment.  $\vec{m}$ : Dipolmoment einer beliebigen  
Leiterschleife. Homogenes  $\vec{B}$ -Feld vorausgesetzt: Gleichung zur Definition von  $\vec{B}$

#### 4.11.7. Kraft auf Permeabilitäts-Grenzflächen

##### Grenzfläche zwischen zwei Permeabilitätsgebieten

$$\vec{F} = \int_A \vec{f} dA \quad \text{mit} \quad \vec{f} = \left[ \frac{B_n^2}{2} \left( \frac{1}{\mu_2} - \frac{1}{\mu_1} \right) + \frac{H_t^2}{2} (\mu_1 - \mu_2) \right] \vec{e}_n$$

$A$ : Grenzfläche.  $\vec{f}$ : magnetische Flächenkraftdichte.  
 $dA$ : skalares Flächenelement der Grenzfläche.  $B_n$  und  $H_t$ : Normalkoordinate der magnetischen Flussdichte bzw. Tangentialkoordinate der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche.  $\mu_{1,2}$ : Permeabilitäten.  
 $\vec{e}_n$ : Normalen-Einheitsvektor des Grenzflächenelementes, von Stoff 1 nach Stoff 2 orientiert

##### Grenzfläche Eisen-Luft

$$\vec{f} = \frac{B_n^2}{2\mu_0} \vec{e}_n \quad \vec{e}_n: \text{Einheitsvektor der Flächennormalen, von Eisen zur Luft orientiert. Annahme: } \mu_{\text{Eisen}} \gg \mu_{\text{Luft}} = \mu_0$$

#### 4.11.8. Maxwell'sche Spannungen im magnetischen Feld

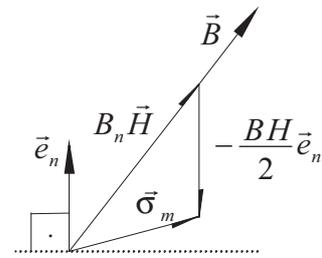
##### Feldspannungsvektor

$$\vec{\sigma}_m = B_n \vec{H} - \frac{BH}{2} \vec{e}_n$$

mit

$$B_n = \vec{B} \cdot \vec{e}_n$$

$\vec{e}_n$ : Normaleneinheitsvektor des Flächenelements, für das die Maxwell'sche Spannung gilt. Seine Orientierung ist wählbar.  $\vec{B}$  halbiert den Winkel zwischen  $\vec{e}_n$  und  $\vec{\sigma}_m$ .



##### Betrag des Feldspannungsvektors

$$\sigma_m = \frac{BH}{2} \quad H, B: \text{ Beträge der magn. Feldstärke bzw. Flussdichte}$$

##### Feldspannungsvektor, wenn Feld normal zum Flächenelement

$$\vec{\sigma}_m = \frac{BH}{2} \vec{e}_n \quad \vec{\sigma}_m \text{ liefert fiktive Normal-Zugkraft auf das Flächenelement (Zug längs } \vec{e}_n).$$

##### Feldspannungsvektor, wenn Feld parallel zum Flächenelement

$$\vec{\sigma}_m = -\frac{BH}{2} \vec{e}_n \quad \vec{\sigma}_m \text{ liefert fiktive Normal-Druckkraft auf das Flächenelement (Druck entgegen } \vec{e}_n).$$

##### Kraft auf Objekt in Bilanzhülle

$$\vec{F} = \oint_{\partial V} \vec{\sigma}_m dA \quad \partial V: \text{ Bilanzhülle, die Objekt vollständig umschließt. } dA: \text{ skalares Flächenelement der Hülle}$$

#### 4.11.9. Kraft nach der Methode der virtuellen Verschiebung

$$F_s = - \left. \frac{dW_m}{ds} \right|_{s_0} + \left. \frac{dW_{\ddot{u}}}{ds} \right|_{s_0}$$

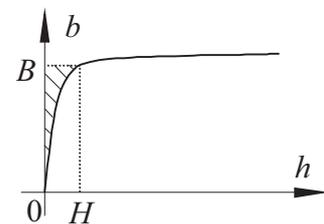
$F_s$ :  $s$ -Koordinate der Kraft auf Objekt in Bilanzhülle.  
 $ds$ ; virtuelle Verschiebung des Objekts in Richtung der  $s$ -Achse.  $dW_m$ : Erhöhung der Feldenergie nach der Verschiebung um  $ds$ .  $dW_{\ddot{u}}$ : Eintragung weiterer Energien in die Bilanzhülle (außer der Verschiebungsarbeit und der Feldenergie) in Folge der Verschiebung.  $s_0$ : Positionskoordinate des unverschobenen Objekts

#### 4.12. Energie im magnetischen Feld

##### 4.12.1. Energiedichte bei nichtlinearer Magnetisierungskennlinie

$$w = \frac{dW}{dV} = \int_0^B h db$$

$h(b)$ : Magnetisierungskurve.  
 $w$  gilt für die Flussdichte  $B$ .



##### 4.12.2. Energiedichte bei linearer Magnetisierungskennlinie

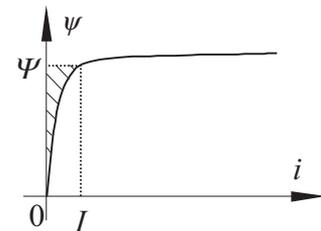
$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{BH}{2}$$

$B, H$ : Beträge der magnetischen Flussdichte bzw. Feldstärke

##### 4.12.3. Feldenergie einer nichtlinearen Spule

$$W = \int_0^{\Psi} i d\psi$$

$i(\psi)$ : Strom-Spulenfluss-Kennlinie der Spule



##### 4.12.4. Feldenergie einer linearen Spule

$$W = \frac{\Psi I}{2}$$

$\Psi$ : Spulenfluss.  $I$ : Strom

##### 4.12.5. Feldenergie eines magnetisch gekoppelten linearen Spulenpaares

$$W = \frac{1}{2}L_1I_1^2 + MI_1I_2 + \frac{1}{2}L_2I_2^2$$

$L_{1,2}$ : Selbstinduktivitäten.  $M$ : Gegeninduktivität.  $M$  positiv oder negativ

## 5. Netzwerke mit beliebigem Zeitverlauf von Strom und Spannung

### 5.1. Kirchhoff'sche Sätze

Siehe 1.12 bis 1.14. Die Gleichgrößen im Knotenpunkts- und Maschensatz sind kontextgemäß durch zeitveränderliche Ströme bzw. Spannungen zu ersetzen.

### 5.2. Strom-Spannungsverhalten der Grundschaltelemente

#### 5.2.1. Ohm'scher Widerstand

$$u = Ri \quad \text{Verbraucherpfeldsystem (VS)}$$

#### 5.2.2. Lineare Spule

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \text{Verbraucherpfeldsystem (VS). Selbstinduktivität } L \text{ konstant}$$

#### 5.2.3. Nichtlineare Spule

$$u = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d}{dt}(Li) \quad \text{Verbraucherpfeldsystem (VS). Selbstinduktivität } L \text{ und (selbstinduz.) Verkettungsfluss } \psi \text{ abhängig vom Strom } i. \text{ Bezugspfeile von } \psi \text{ und } i \text{ rechtshändig koordiniert}$$

#### 5.2.4. Magnetisch gekoppeltes lineares Spulenpaar

$$u_1 = L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \quad \text{Beide Spulen im Verbraucherpfeldsystem (VS). Gegeninduktivität } M \text{ kann positiv oder negativ sein.}$$

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

#### 5.2.5. Linearer Kondensator

$$i = C \frac{du}{dt} \quad \text{Verbraucherpfeldsystem (VS). } C: \text{ Kapazität}$$

#### 5.2.6. Nichtlinearer Kondensator

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt}(Cu) \quad \text{Verbraucherpfeldsystem (VS). Ladung } q \text{ und Kapazität } C \text{ abhängig von der Spannung } u$$

### 5.3. Leistung und Energie

#### 5.3.1. Momentanleistung eines Zweipols

$$p = ui \quad p > 0 \text{ bedeutet im VS Leistungsaufnahme, im ES Leistungsabgabe.}$$

### 5.3.2. Wirkleistung eines Zweipols bei periodischen Größen

$$P = \overline{ui} = \frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} u i dt$$

Die Überstreichung bezeichnet den arithmetischen Mittelwert.  $T$ : Periodendauer.  $P > 0$  bedeutet im VS Leistungsaufnahme, im ES Leistungsabgabe.  $t_A$  beliebig.

### 5.3.3. Blindleistung eines Zweipols bei periodischen Größen

$$Q = \sqrt{S^2 - P^2} \geq 0 \quad S = UI: \text{Scheinleistung. } P = \overline{ui}: \text{Wirkleistung}$$

### 5.3.4. Blindleistung einer Gruppe von Zweipolen oder Zweigen bei periodischen Größen

$$Q = \sqrt{\sum_{\mu=1}^m \sum_{\nu=1}^m \{ \overline{u_{\mu} u_{\nu}} \overline{i_{\mu} i_{\nu}} - \overline{u_{\mu} i_{\nu}} \overline{i_{\mu} u_{\nu}} \}} \geq 0$$

Blindleistung nach W. Quade.  $\nu, \mu$ : Indizes der Zweipole oder Zweige.  $m$ : deren Anzahl.  $u = u(t)$  und  $i = i(t)$  haben dieselbe Periode. Auch Mischgrößen sind zulässig. Die Überstreichung bezeichnet den arithmetischen Mittelwert über eine Periode. Die Gleichung gilt auch für die auf einer  $n$ -adrigen Leitung übertragene Blindleistung. Die Anzahl der Leitungszweige ist dann  $m = n - 1$ . Bei Anwendung auf Sinusgrößen ist  $Q$  gleich dem Betrag der Verschiebungsblindleistung.

### 5.3.5. Elektrische Energie eines Zweipols

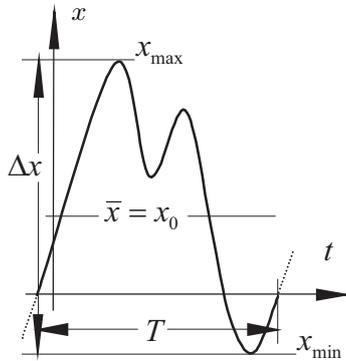
$$W = \int_{t_1}^{t_2} u i dt$$

$W$ : elektrische Energie in der Zeitspanne  $t_1 \leq t \leq t_2$ . Vorzeichenkonvention:  $W > 0$  bedeutet im VS Energieaufnahme, im ES Energieabgabe.

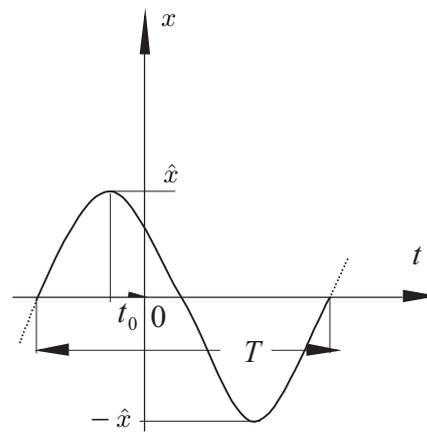
## 6. Periodische und harmonische Größen

### 6.1. Begriffe

#### Periodischer Zeitverlauf



#### Harmonischer Zeitverlauf



#### 6.1.1. Amplitude

nicht definiert

$\hat{x}$

#### 6.1.2. Schwankungsbereich

$\Delta x$

$\Delta x = 2\hat{x}$

#### 6.1.3. Periodendauer

$T$

$T$

#### 6.1.4. Frequenz

$$f = \frac{1}{T}$$

$$f = \frac{1}{T}$$

#### 6.1.5. Kreisfrequenz

$$\omega = 2\pi f$$

$$\omega = 2\pi f$$

#### 6.1.6. Phasenwinkel

nicht definiert

$\omega t + \varphi_0$

#### 6.1.7. Nullphasenwinkel

nicht definiert

$$\varphi_0 = \omega t_0$$

Der Nullphasenwinkel ist gleich dem Phasenwinkel für  $t = 0$ .

## Periodischer Zeitverlauf

## Harmonischer Zeitverlauf

### 6.1.8. Nullphasenzeit

nicht definiert

$$t_0 = \frac{\varphi_0}{\omega}$$

### 6.1.9. Wechselanteil

$$x_{\sim} = x - x_0$$

$$x_{\sim} = \hat{x} \cos(\omega t + \varphi_0) = x$$

### 6.1.10. Gleichanteil

$$x_0 = \frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} x dt \quad (t_A \text{ beliebig})$$

$$x_0 = 0$$

### 6.1.11. Gleichrichtwert

$$|\overline{x}| = \frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} |x| dt \quad (t_A \text{ beliebig})$$

$$|\overline{x}| = \frac{2}{\pi} \hat{x}$$

### 6.1.12. Effektivwert

$$X = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} x^2 dt} \quad (t_A \text{ beliebig})$$

$$X = \frac{\hat{x}}{\sqrt{2}}$$

### 6.1.13. Formfaktor einer Wechselgröße

$$F = \frac{X}{|\overline{x}|}$$

$$F = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \approx 1,11$$

### 6.1.14. Scheitelfaktor einer Wechselgröße

$$S = \frac{|x|_{\max}}{X}$$

$$S = \frac{\hat{x}}{X} = \sqrt{2}$$

## 6.2. Wechselgröße und Mischgröße

Wechselgrößen und Mischgrößen sind periodisch mit  $x_0 = 0$  bzw.  $x_0 \neq 0$ .

## 6.3. Fourier-Reihenentwicklung periodischer Größen

### 6.3.1. Grundfrequenz und Grundkreisfrequenz

$$f = \frac{1}{T} \quad \text{bzw.} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad T: \text{Periode der Zeitfunktion } x(t)$$

### 6.3.2. Entwicklung der Größe durch harmonische Komponenten

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \hat{x}_k \cos(k\omega t + \varphi_k)$$

$x_0$ : Gleichanteil.  $\hat{x}_k$ : Fourieramplituden.  
 $\varphi_k$ : Fourier-Nullphasenwinkel.  
 Näherung: Endliche Summandenzahl

### 6.3.3. Gleichanteil

$$x_0 = \frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} x dt \quad t_A \text{ beliebig}$$

### 6.3.4. Komplexe Fourier-Koeffizienten

$$c_k = \frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} x e^{-jk\omega t} dt \quad t_A \text{ beliebig}$$

### 6.3.5. Fourier-Amplituden

$$\hat{x}_k = 2 |c_k| \quad x_1 = \hat{x}_1 \cos(\omega t + \varphi_1): \text{ Grundschiwingung oder 1. Harmonische. } x_2 = \hat{x}_2 \cos(2\omega t + \varphi_2): \text{ 2. Harmonische usw.}$$

### 6.3.6. Fourier-Nullphasenwinkel

$$\varphi_k = \text{Arc } c_k \quad \text{Winkel von } c_k \text{ mit der reellen Achse}$$

### 6.3.7. Komplexe Fourier-Koeffizienten nach dem Sprungstellenverfahren

$$c_k = \frac{1}{j 2\pi k} \left( \sum_{i=1}^r s_i e^{-jk\omega t_i} + \frac{1}{j\omega k} \sum_{i=1}^{r'} s'_i e^{-jk\omega t'_i} \right)$$

mit

$$s_i = x(t_{i+}) - x(t_{i-}) \quad \text{und} \quad s'_i = \frac{dx}{dt}(t'_{i+}) - \frac{dx}{dt}(t'_{i-})$$

$c_k$  gilt für abschnittsweise geradlinige periodische Funktionen  $x(t)$  mit Sprüngen und Knicken.  $k$ : Ordnungszahl.  $\omega$ : Grundkreisfrequenz.  $t_i$ : Sprungzeitpunkte.  $t'_i$ : Knickzeitpunkte.  $r$ : Anzahl Sprünge.  $r'$ : Anzahl Knicke.  $s_i$ : Sprunghöhen.  $s'_i$ : Knickhöhen (Höhe der Ableitungssprünge).  $t_{i+}, t_{i-}$  und  $t'_{i+}, t'_{i-}$ : rechts- und linksseitige Nachbarwerte der Sprung- bzw. Knickzeitpunkte

### 6.3.8. Effektivwert

$$X = \sqrt{x_0^2 + X_1^2 + \dots}$$

$x_0$ : Gleichanteil. Die  $X_k = \hat{x}_k / \sqrt{2}$  sind die Effektivwerte der harmonischen Komponenten.

### 6.3.9. Klirrfaktor einer Wechselgröße, Oberschwingungsgehalt

$$k = \frac{\sqrt{X_2^2 + X_3^2 + \dots}}{X}$$

Zähler: Effektivwert ohne Grundschwingung.

$X$ : Effektivwert der Wechselgröße

### 6.3.10. Wirkleistung bei Strom und Spannung gleicher Grundfrequenz

$$P = u_0 i_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k I_k \cos \psi_k$$

$u_0, i_0$ : Gleichanteile.  $U_k, I_k$ : Effektivwerte der Harmonischen.  $\psi_k = \varphi_{uk} - \varphi_{ik}$ : Phasenverschiebungswinkel zwischen den Spannungs- und Stromharmonischen.  $P > 0$  bedeutet im VS Leistungsaufnahme, im ES Leistungsabgabe.

## 7. Lineare Netzwerke mit harmonischen Strömen und Spannungen

### 7.1. Spannungszeiger

$$\underline{U} = U e^{j\varphi_u}$$

$\underline{U}$  bildet die harmonische Spannung  $u = U\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_u)$  in der komplexen Ebene ab.  $U$ : Effektivwert.  $\varphi_u$ : Nullphasenwinkel. Die Kreisfrequenz  $\omega$  tritt in den Hintergrund.

### 7.2. Stromzeiger

$$\underline{I} = I e^{j\varphi_i}$$

$\underline{I}$  bildet den harmonischen Strom  $i = I\sqrt{2} \cos(\omega t + \varphi_i)$  in der komplexen Ebene ab.  $I$ =Effektivwert.  $\varphi_i$ : Nullphasenwinkel. Die Kreisfrequenz  $\omega$  tritt in den Hintergrund.

### 7.3. Impedanz und Admittanz eines Zweipols

#### 7.3.1. Allgemeiner Zweipol

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$$

bzw.

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}}$$

$\underline{Z}$  heißt auch komplexer Widerstand oder komplexe Impedanz.  $\underline{Y}$  heißt auch komplexer Leitwert oder komplexe Admittanz.

#### Scheinwiderstand- und Scheinleitwert

$$Z = |\underline{Z}| = \frac{U}{I}$$

bzw.

$$Y = |\underline{Y}| = \frac{I}{U}$$

$U, I$ : Effektivwerte.  $Z \geq 0, Y \geq 0$

#### Phasenverschiebungswinkel

$$\varphi = \text{Arc}\underline{Z} = \varphi_u - \varphi_i$$

$\text{Arc}\underline{Z}$ : Winkel von  $\underline{Z}$  mit der reellen Achse.

$\varphi_u, \varphi_i$ : Nullphasenwinkel

#### Verknüpfung von Impedanz und Admittanz

$$\underline{Y}\underline{Z} = 1$$

Impedanz und Admittanz sind zueinander reziprok.

#### Wirkwiderstand und Wirkleitwert

$$R = \text{Re}\underline{Z} = Z \cos \varphi$$

bzw.

$$G = \text{Re}\underline{Y} = Y \cos \varphi$$

$R$  heißt auch Resistanz und  $G$  Konduktanz.

$R \geq 0, G \geq 0$

### Blindwiderstand und Blindleitwert

$$\begin{aligned} X &= \operatorname{Im} \underline{Z} = Z \sin \varphi && X \text{ heißt auch Reaktanz und } B \text{ Suszeptanz.} \\ \text{bzw.} &&& X \geq 0, \quad B \leq 0 \\ B &= \operatorname{Im} \underline{Y} = -Y \sin \varphi \end{aligned}$$

### Impedanz und Admittanz in kartesischer und polarer Form

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R + jX = Ze^{j\varphi} && R: \text{Resistenz. } X: \text{Reaktanz. } G: \text{Konduktanz. } B: \text{Suszeptanz. } \varphi: \text{Phasenverschiebungswinkel} \\ \text{bzw.} &&& \\ \underline{Y} &= G + jB = Ye^{-j\varphi} \end{aligned}$$

#### 7.3.2. Ohm'scher Verbraucher

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= R && R: \text{Ohm'scher Widerstand. } G = 1/R: \text{Ohm'scher Leitwert. Strom und Spannung phasengleich. VS vorausgesetzt} \\ \text{bzw.} &&& \\ \underline{Y} &= G \end{aligned}$$

#### 7.3.3. Spule

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= j\omega L && L: \text{Selbstinduktivität. Strom eilt Spannung um } 90^\circ \text{ nach. VS vorausgesetzt} \\ \text{bzw.} &&& \\ \underline{Y} &= \frac{1}{j\omega L} \end{aligned}$$

#### 7.3.4. Kondensator

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{j\omega C} && C: \text{Kapazität. Strom eilt Spannung um } 90^\circ \text{ vor. VS vorausgesetzt} \\ \text{bzw.} &&& \\ \underline{Y} &= j\omega C \end{aligned}$$

#### 7.3.5. Spannungsgleichungen eines magnetisch gekoppelten linearen Spulenpaars

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= L_1 \frac{d\underline{I}_1}{dt} + M \frac{d\underline{I}_2}{dt} && \text{Beide Spulen im Verbraucherpeilsystem (VS). Gegeninduktivität } M \text{ kann positiv oder negativ sein (vgl. 4.9).} \\ \underline{U}_2 &= L_2 \frac{d\underline{I}_2}{dt} + M \frac{d\underline{I}_1}{dt} \end{aligned}$$

### 7.4. Kirchhoff'sche Sätze

Siehe 1.13 bis 1.15 Die Gleichgrößen im Knotenpunkts- und Maschensatz sind kontextgemäß durch Zeigergrößen zu ersetzen.

### 7.5. Reihenschaltung: Impedanz und Spannungsteilerregel

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{res} &= \sum_{\mu} \underline{Z}_{\mu} && \text{Durch die Widerstände fließt derselbe Strom.} \\ \frac{\underline{U}_{\nu}}{\underline{U}_{\mu}} &= \frac{\underline{Z}_{\nu}}{\underline{Z}_{\mu}} \end{aligned}$$

## 7.6. Parallelschaltung: Admittanz und Stromteilerregel

$\underline{Y}_{res} = \sum_{\mu} \underline{Y}_{\mu}$  An den Widerständen liegt dieselbe Spannung.

$$\frac{\underline{I}_{\nu}}{\underline{I}_{\mu}} = \frac{\underline{Y}_{\nu}}{\underline{Y}_{\mu}}$$

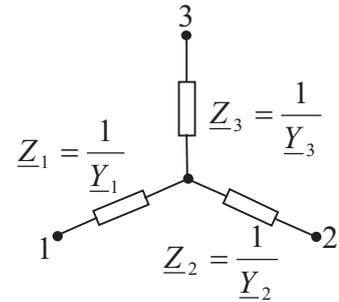
## 7.7. Stern-Dreieck-Umwandlung

### 7.7.1. Vom Dreieck zum Stern

$\underline{Z}_1 = \frac{\underline{Z}_{12}\underline{Z}_{31}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$  Das Zielnetzwerk und das Ausgangsnetzwerk haben gleiches Klemmenverhalten.

$$\underline{Z}_2 = \frac{\underline{Z}_{23}\underline{Z}_{12}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

$$\underline{Z}_3 = \frac{\underline{Z}_{31}\underline{Z}_{23}}{\underline{Z}_{12} + \underline{Z}_{23} + \underline{Z}_{31}}$$

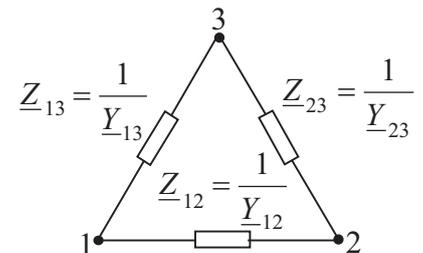


### 7.7.2. Vom Stern zum Dreieck

$\underline{Y}_{12} = \frac{\underline{Y}_1\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$  Das Zielnetzwerk und das Ausgangsnetzwerk haben gleiches Klemmenverhalten.

$$\underline{Y}_{23} = \frac{\underline{Y}_2\underline{Y}_3}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

$$\underline{Y}_{31} = \frac{\underline{Y}_3\underline{Y}_1}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_3}$$

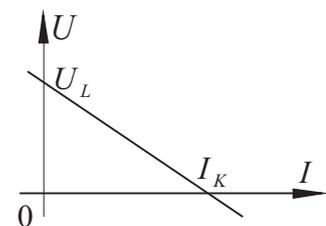


## 7.8. Aktive lineare Zweipole

### 7.8.1. Kennlinienmodell

$$\underline{U} = \underline{U}_L - \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K} \underline{I}$$

$\underline{U}$ : Klemmenspannung.  $\underline{I}$ : Klemmenstrom.  $\underline{U}_L$ : Leerlaufspannung.  $\underline{I}_K$ : Kurzschlussstrom. Der Zweipol ist im Erzeugerpeilsystem (ES) beschrieben.



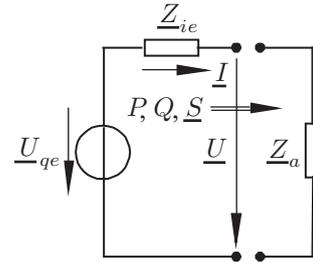
### 7.8.2. Ersatzspannungsquelle

$$\underline{U} = \underline{U}_{qe} - \underline{Z}_{ie}\underline{I}$$

$$\underline{U}_{qe} = \underline{U}_L$$

$$\underline{Z}_{ie} = \frac{\underline{U}_L}{\underline{I}_K}$$

$\underline{U}_{qe}$ : Ersatzquellenspannung.  
 $\underline{Z}_{ie}$ : Ersatzinnenwiderstand.  
 Der Zweipol ist im Erzeugerpfilsystem (ES) beschrieben.



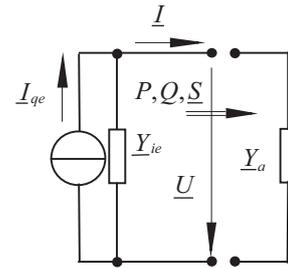
### 7.8.3. Ersatzstromquelle

$$\underline{I} = \underline{I}_{qe} - \underline{Y}_{ie}\underline{U}$$

$$\underline{I}_{qe} = \underline{I}_K$$

$$\underline{Y}_{ie} = \frac{\underline{I}_K}{\underline{U}_L} = \frac{1}{\underline{Z}_{ie}}$$

$\underline{I}_{qe}$ : Ersatzquellenstrom.  $\underline{Y}_{ie}$ : Ersatzinnenleitwert.  
 Der Zweipol ist im Erzeugerpfilsystem (ES) beschrieben.



### 7.9. Wirk-Blind-Zerlegung von Strom und Spannung

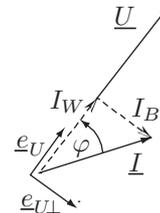
$u = U\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_u)$  Für die Zerlegungen sind harmonische Verläufe von  
 bzw. Strom und Spannung vorausgesetzt

$$i = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \varphi_i)$$

#### 7.9.1. Zerlegung des Stroms nach der Spannung

$$\underline{I} = I_W \underline{e}_U + I_B \underline{e}_{U\perp}$$

Die Koordinaten der Zerlegung sind der Wirkstrom  $I_W$  und der Blindstrom  $I_B$ .



#### Einheitszeiger der Zerlegungsbasis

$$\underline{e}_U = \frac{\underline{U}}{U}$$

$$\underline{e}_{U\perp} = -j\underline{e}_U$$

$\underline{e}_U$ : Einheitszeiger in Phase mit der Spannung  $\underline{U}$ .  
 $\underline{e}_{U\perp}$ : Einheitszeiger, der  $\underline{U}$  um  $90^\circ$  nacheilt.  $U$ : Effektivwert der Spannung

#### Wirk- und Blindstrom

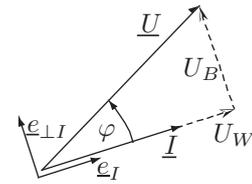
$$I_W = \operatorname{Re} \frac{\underline{I}}{\underline{e}_U} = I \cos \varphi \quad \text{bzw.} \quad I_B = \operatorname{Re} \frac{\underline{I}}{\underline{e}_{U\perp}} = I \sin \varphi$$

Phasenverschiebungswinkel  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

### 7.9.2. Zerlegung der Spannung nach dem Strom

$$\underline{U} = U_W \underline{e}_I + U_B \underline{e}_{\perp I}$$

Die Koordinaten der Zerlegung sind die Wirkspannung  $U_W$  und die Blindspannung  $U_B$ .



#### Einheitszeiger der Zerlegungsbasis

$$\underline{e}_I = \frac{\underline{I}}{I}$$

$$\underline{e}_{\perp I} = j \underline{e}_I$$

$\underline{e}_I$ : Einheitszeiger in Phase mit dem Strom  $\underline{I}$ .  $\underline{e}_{\perp I}$ : Einheitszeiger, der  $\underline{I}$  um  $90^\circ$  vorseilt.  $I$ : Effektivwert des Stroms

#### Wirk- und Blindspannung

$$U_W = \operatorname{Re} \frac{\underline{U}}{\underline{e}_I} = U \cos \varphi$$

$$\text{bzw. } U_B = \operatorname{Re} \frac{\underline{U}}{\underline{e}_{\perp I}} = U \sin \varphi$$

Phasenverschiebungswinkel  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$

## 7.10. Leistung bei harmonischem Verlauf von Strom und Spannung

### 7.10.1. Augenblickswert

$$p = P + S \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)$$

$P$ : Wirkleistung.  $S$ : Scheinleistung. Spannung und Strom wie unter 7.9

### 7.10.2. Scheinleistung

$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$U, I$ : Effektivwerte.  $P$ : Wirkleistung.  $Q$ : Blindleistung

### 7.10.3. Wirkleistung

$$P = UI \cos \varphi$$

$U, I, U_W, I_W$ : Effektivwerte.  $U_W$ : Wirkspannung,  $I_W$ : Wirkstrom nach 7.9  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ : Phasenverschiebungswinkel

$$P = UI_W = U_W I$$

#### 7.10.4. Blindleistung (Verschiebungsblindleistung)

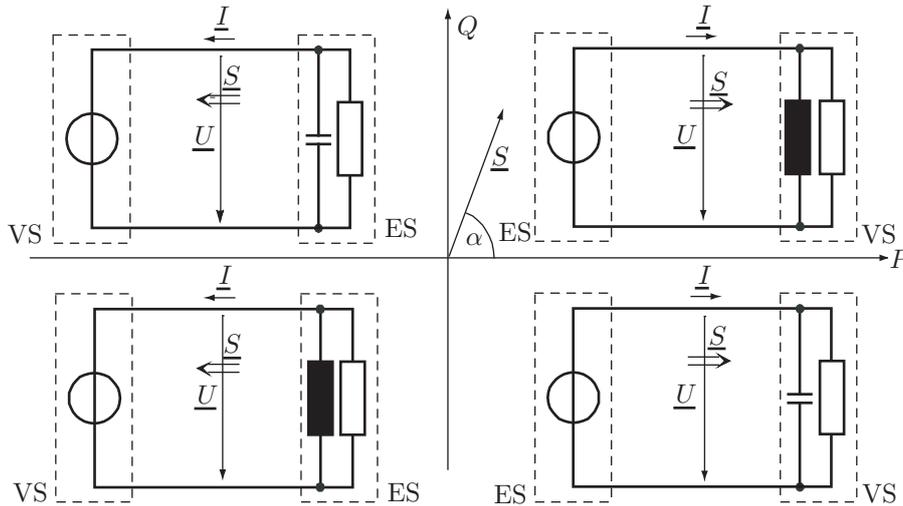
$$\begin{aligned}
 Q &= \overline{ui'} \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t_A}^{t_A+T} u(t)i'(t)dt \\
 &= UI \sin \varphi \\
 &= UI_B \\
 &= U_B I
 \end{aligned}$$

Die Gleichungen gelten nur für harmonische Verläufe von  $u$  und  $i$ . Überstreich: arithmetischer Mittelwert.  $i'$  =  $\frac{di}{d(\omega t)}$ : um  $T/4$  voreilend verschobene Stromstärke.  $\omega$ : Kreisfrequenz von  $u$  und  $i$ .  $T$ : Periode.  $t_A$  beliebig.  $U, I$ : Effektivwerte.  $U_B, I_B$ : Vorzeichenbehaftete Effektivwerte.  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ : Phasenverschiebungswinkel.  $U_B$ : Blindspannung,  $I_B$ : Blindstrom nach 7.9. Spulen „verbrauchen“, Kondensatoren „erzeugen“ Blindleistung.

#### 7.10.5. Komplexe Scheinleistung

$$\underline{S} = P + jQ = \underline{U} \underline{I}^* = UI e^{j\varphi} = \underline{Z} I^2 = \underline{Y}^* U^2$$

$P$ : Wirkleistung.  $Q$ : Blindleistung.  $U, I$ : Effektivwerte.  $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$ : Phasenverschiebungswinkel.  $\underline{Z}$ : Impedanz.  $\underline{Y}$ : Admittanz



Realisierung der Vorzeichen von  $P$  und  $Q$  durch Beispielnetzwerke. Sie sind jeweils in die ihrer Wirk- und Blindleistung entsprechenden Quadranten der  $\underline{S}$ -Ebene eingezeichnet.

*Beispiel* Im 1. Quadranten ( $P > 0, Q > 0, 0 < \varphi < \pi/2$ ) nimmt der rechte Zweipol Wirk- und Blindleistung auf, der linke gibt sie ab.

#### 7.10.6. Leistungsanpassung

$$\underline{Z}_a = \underline{Z}_{ie}^* \quad \text{oder} \quad \underline{Y}_a = \underline{Y}_{ie}^*$$

Die Bedingungen sind gleichwertig und führen zur maximalen Wirkleistung in der Last  $\underline{Z}_a$  oder  $\underline{Y}_a$  (vgl. 7.8.2 bzw. 7.8.3).

## 7.11. Ortskurven

### 7.11.1. Gerade durch den Ursprung und ihre Inversion

$$\underline{G}_0 = p\underline{B}$$

$$\frac{1}{\underline{G}_0} = \frac{1}{p} \frac{\underline{B}^*}{\underline{B}^2}$$

$\underline{G}_0$ : Gerade durch den Ursprung.  $\underline{B}$ : komplexe Konstante.  $p$ : reeller Parameter.  $\underline{B}^*$ : konjugiert komplexe Konstante.  $B = |\underline{B}|$ .

Die Inversion einer Geraden durch den Ursprung ergibt wieder eine Gerade durch den Ursprung.

### 7.11.2. Gerade mit Abstand zum Ursprung und ihre Inversion

$$\underline{G} = \underline{A} + p\underline{B}$$

$$\frac{1}{\underline{G}} = \frac{1}{\underline{A} + p\underline{B}}$$

$\underline{A}, \underline{B}$ : komplexe Konstanten.  $p$ : reeller Parameter.

Die Inversion einer Geraden, die nicht durch den Ursprung geht, ergibt einen Kreis durch den Ursprung.

### Mittelpunkt und Radius des Inversionskreises

$$\underline{M} = \frac{1}{2\underline{e}_n} \frac{1}{\operatorname{Re}\{\underline{A}/\underline{e}_n\}} \quad \text{mit} \quad \underline{e}_n = j \frac{\underline{B}}{|\underline{B}|} \quad \text{bzw.} \quad R = |\underline{M}|$$

Der ursprungsfernste Punkt (Scheitelpunkt) des Inversionskreises  $1/\underline{G}$  ist  $2\underline{M}$ . Die Einheitskonstante  $\underline{e}_n$  steht senkrecht auf der Geraden  $\underline{G}$ .

### 7.11.3. Kreis mit Abstand zum Ursprung und seine Inversion

$$\underline{K} = \frac{\underline{A} + p\underline{B}}{\underline{C} + p\underline{D}}$$

$$\frac{1}{\underline{K}} = \frac{\underline{C} + p\underline{D}}{\underline{A} + p\underline{B}}$$

$\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}, \underline{D}$ : komplexe Konstanten.  $p$ : reeller Parameter. Die Inversion eines Kreises, der nicht durch den Ursprung geht, führt auf einen Kreis, der ebenfalls nicht durch den Ursprung geht.

## 7.12. Reihenschwingkreis

### 7.12.1. Eigenwerte

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm j \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

Reihenschwingkreis: Eine ideale Spannungsquelle erregt die in Serie geschalteten Komponenten Widerstand  $R$ , Induktivität  $L$  und Kapazität  $C$ .

### 7.12.2. Dämpfungsgrad

$$D = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$$

$R$ : Widerstand.  $L$ : Induktivität.  $C$ : Kapazität.  $D = 0$ : ungedämpft schwingende,  $0 < D < 1$ : gedämpft schwingende,  $D > 1$ : aperiodische Eigenlösung.  $D = 1$ : aperiodischer Grenzfall

### 7.12.3. Kennkreisfrequenz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$L$ : Induktivität.  $C$ : Kapazität. Die Kennkreisfrequenz ist gleich der Eigenkreisfrequenz für  $R = 0$ .

### 7.12.4. Eigenkreisfrequenz

$${}^e\omega = \omega_0 \sqrt{1 - D^2}$$

$\omega_0$ : Kennkreisfrequenz.  $D$ : Dämpfungsgrad. Die Eigenkreisfrequenz ist gleich der Kreisfrequenz der freien Schwingung.

### 7.12.5. Resonanzfrequenz der Widerstandsspannung

$$\omega_R = \omega_0$$

$\omega_0$ : Kennkreisfrequenz. Die Amplitude der Schwingungsgröße ist bei ihrer Resonanzfrequenz maximal.

$$\omega_L = \omega_0 \frac{1}{\sqrt{1 - 2D^2}}$$

$\omega_0$ : Kennkreisfrequenz.  $D$ : Dämpfungsgrad. Die Amplitude der Schwingungsgröße ist bei ihrer Resonanzfrequenz maximal.

### 7.12.6. Resonanzfrequenz der Kondensatorspannung

$$\omega_C = \omega_0 \sqrt{1 - 2D^2}$$

$\omega_0$ : Kennkreisfrequenz.  $D$ : Dämpfungsgrad. Die Amplitude der Schwingungsgröße ist bei ihrer Resonanzfrequenz maximal.

### 7.12.7. Kompensationskreisfrequenz

$$\omega_K = \omega_0$$

$\omega_0$ : Kennkreisfrequenz. Die Reihenschaltung aus  $R$ ,  $L$  und  $C$  hat bei  $\omega_K$  eine reelle Impedanz. Die Kompensationsfrequenz ist bei schwach gedämpften Schwingkreisen eine Näherung der Resonanzfrequenz.

### 7.12.8. Frequenz-Bandbreite der Widerstandsspannung

$$\Delta f = f_{go} - f_{gu} \quad \text{mit} \quad f_{go,gu} = \frac{\omega_0}{2\pi} \left( \sqrt{1 + D^2} \pm D \right)$$

$f_{go,gu}$ : obere, untere Grenzfrequenz, bei der die Widerstandsspannung den  $1/\sqrt{2}$ -fachen Wert ihres Resonanzwertes hat.  $\omega_0$ : Kennkreisfrequenz.  $D$ : Dämpfungsgrad

### 7.12.9. Güte des Reihenschwingkreis

$$Q = \frac{f_R}{\Delta f} = \frac{1}{2D}$$

$f_R = \omega_0/(2\pi)$ : Resonanzfrequenz der Widerstandsspannung.  $\Delta f$ : Frequenz-Bandbreite der Widerstandsspannung.  $D$ : Dämpfungsgrad

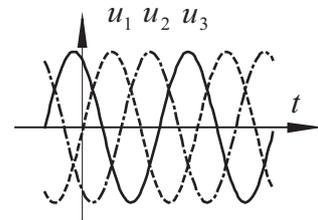
## 8. Dreiphasensystem mit harmonischen Strömen und Spannungen

### 8.1. Symmetrische Dreiphasensysteme

#### 8.1.1. Phasenfolge im Zeitdiagramm

1, 2, 3

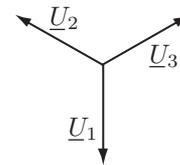
Die Phasenfolge in einem Dreiphasensystem ist die zeitliche Reihenfolge, in der die gleichartigen Augen...



#### 8.1.2. Phasenfolge im Zeigerbild

1, 2, 3

...blickswerte der elektrischen Spannungen in den einzelnen Strombahnen auftreten. Abgebildet ist der Fall 1, 2, 3.



#### 8.1.3. Beziehung zwischen Leiter- und Stranggrößen bei Sternschaltung

$$U_L = \sqrt{3}U_{Str} \quad \text{und} \quad I_L = I_{Str}$$

Index *Str*: Stranggrößen. Index *L*: Leitergrößen. *U, I*: Effektivwerte

#### 8.1.4. Beziehung zwischen Leiter- und Stranggrößen bei Dreieckschaltung

$$U_L = U_{Str} \quad \text{und} \quad I_L = \sqrt{3}I_{Str}$$

Index *Str*: Stranggrößen. Index *L*: Leitergrößen. *U, I*: Effektivwerte

#### 8.1.5. Phasenverschiebungswinkel der Stränge

$$\varphi_{Str} = \varphi_{uStr} - \varphi_{iStr} \quad \text{Gilt für Stern- und Dreieckschaltung.}$$

#### 8.1.6. Wirkleistung

$$P = 3U_{Str}I_{Str} \cos \varphi_{Str} = \sqrt{3}U_L I_L \cos \varphi_{Str}$$

Index *Str*: Stranggrößen. Index *L*: Leitergrößen. *U, I*: Effektivwerte. Gilt für Stern- und Dreieckschaltung.

#### 8.1.7. Blindleistung

$$Q = 3U_{Str}I_{Str} \sin \varphi_{Str} = \sqrt{3}U_L I_L \sin \varphi_{Str}$$

Index *Str*: Stranggrößen. Index *L*: Leitergrößen. *U, I*: Effektivwerte. Gilt für Stern- und Dreieckschaltung.

### 8.1.8. Scheinleistung

$$S = 3U_{Str}I_{Str} = \sqrt{3}U_L I_L$$

Index *Str*: Stranggrößen. Index *L*: Leitergrößen.  $U, I$ : Effektivwerte. Gilt für Stern- und Dreieckschaltung.

## 8.2. Unsymmetrische Dreiphasensysteme

### 8.2.1. Dreieckschaltung

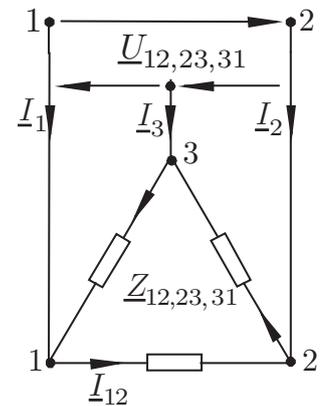
#### Strangströme

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_{12}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_{23}}$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_{31}}$$

Doppelindex: Stranggrößen.  
Die Leiterspannungen erfüllen die Gleichung  $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$ .



#### Leiterströme

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}, \quad \underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \quad \text{und} \quad \underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

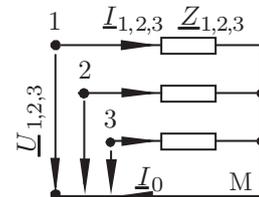
$\underline{I}_{12}, \underline{I}_{23}, \underline{I}_{31}$ : Strangströme

### 8.2.2. Sternschaltung mit angeschlossenem Sternpunkt

#### Strangströme

$$\underline{I}_{1,2,3} = \frac{\underline{U}_{1,2,3}}{\underline{Z}_{1,2,3}}$$

Strangspannungen  $\underline{U}_{1,2,3}$  beliebig.  $\underline{I}_{1,2,3}$ : Strangströme



#### Strom des Mittelpunktsleiters

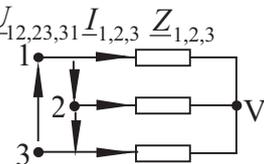
$$\underline{I}_0 = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \quad \underline{I}_{1,2,3}: \text{Strangströme}$$

### 8.2.3. Sternschaltung mit freiem Sternpunkt

#### Strangströme

$$\underline{I}_1 = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_1} \left( \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_2} - \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_3} \right) \quad \underline{I}_2 = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_2} \left( \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_3} - \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}_1} \right) \quad \underline{I}_3 = \frac{\underline{Z}_E}{\underline{Z}_3} \left( \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}_1} - \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}_2} \right)$$

mit  $\frac{1}{\underline{Z}_E} = \left( \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \frac{1}{\underline{Z}_3} \right)$



Dreileitersystem: Der Laststernpunkt V ist nicht angeschlossen.  $\underline{Z}_E$ : Ersatzwiderstand.  $\underline{Z}_{1,2,3}$ : Strangimpedanzen. Die Leiterspannungen erfüllen  $\underline{U}_{12} + \underline{U}_{23} + \underline{U}_{31} = 0$ .

### Strangspannungen

$$\underline{U}_{1V} = \underline{Z}_1 I_1 \quad \underline{U}_{2V} = \underline{Z}_2 I_2 \quad \underline{U}_{3V} = \underline{Z}_3 I_3$$

$\underline{Z}_{1,2,3}$ : Strangimpedanzen.  $\underline{I}_{1,2,3}$ : Strangströme wie oben.  $\underline{U}_{1V,2V,3V}$ : Strangspannungen

### 8.2.4. Momentanleistung aus Leitergrößen eines Mehrleitersystems

$$p = \sum_{\mu=1}^n \varphi_{\mu} i_{\mu}$$

$\mu$ : Leiterindex.  $\varphi_{\mu}$ : Leiterpotenziale.  $i_{\mu}$ : Leiterströme. Gemeinsamer Potenzial-Bezugspunkt beliebig wählbar.  $n$ : Leiterzahl. Drehstromsystem mit Mittelpunkt-leiter:  $n = 4$ , ohne:  $n = 3$ . Gilt für beliebige Last einschließlich Stern- und Dreieckschaltung.

## 9. Instationäre Vorgänge in linearen, zeitinvarianten Netzwerken

### 9.1. Netzwerk mit einem Speicher

#### 9.1.1. Differentialgleichung

$$\frac{dz}{dt} = \lambda z + q$$

Anfangswert  $z(0)$

Die Kirchhoff'schen Sätze führen auf eine Differenzialgleichung, die sich in die linksstehende Form kleiden lässt.  $z$ : Kondensatorspannung oder Spulenstrom (Zustandsgröße des Speichers).  $\lambda$ : Eigenwert.  $q$ : Störfunktion mit Zeitverlauf der Quellengrößen.

#### Eigenwert und Eigenzeitkonstante

$$\tau = -\frac{1}{\lambda}$$

Die Eigenzeitkonstante  $\tau$  ist gleich dem negativen Kehrwert des Eigenwerts  $\lambda$ .

#### 9.1.2. Lösung durch Integration

$$z(t) = e^{\lambda t} \left( z(0) + \int_0^t e^{-\lambda t'} q(t') dt' \right)$$

Die Lösung gilt auch für den Resonanzfall ( $q \sim e^{\lambda t}$ ).

#### 9.1.3. Lösung nach dem Superpositionsverfahren

$$z(t) = (z(0) - z_p(0))e^{\lambda t} + z_p(t)$$

Die Lösung setzt sich aus der partikulären Lösung  $z_p$  und der Ausgleichslösung zusammen und gilt nicht für den Resonanzfall ( $q \sim e^{\lambda t}$ ).

#### Erzwungene oder partikuläre Lösung

$z_p$

Jede Lösung, welche die DGl. erfüllt, heißt partikulär oder erzwungen. Sie ist oft vom Zeitverlaufstyp der Anregung und braucht den Anfangswert nicht zu erfüllen. Für ein Netzwerk ohne Quellen gilt  $z_p = 0$ .

## 9.2. Netzwerk mit mehreren Speichen

### 9.2.1. Differentialgleichung

$$\frac{d\bar{z}}{dt} = \bar{A}\bar{z} + \bar{q} \text{ mit Anfangsvektor } \bar{z}(0)$$

Die Kirchhoff'schen Sätze führen bei einem Netzwerk mit  $n$  Speicherelementen auf eine vektorwertige Differentialgleichung der angegebenen Form.  $\bar{z}$ : Zustandsvektor mit insgesamt  $n$  Kondensatorspannungen oder Spulenströmen als Koordinaten.  $\bar{A}$ : Systemmatrix vom Typ  $n \times n$ .  $\bar{q}$ : Störvektor vom Typ  $n \times 1$  mit den Zeitfunktionen der Quellengrößen

### 9.2.2. Numerische Lösung

Die Vektordifferentialgleichung liegt aufgelöst nach  $\frac{d\bar{z}}{dt}$  vor. Sie ist damit zahlreichen numerischen Lösungsverfahren (z. B. nach Runge-Kutta) zugänglich. Lösungsverfahren siehe auch [A.9](#)

### 9.2.3. Lösung nach dem Superpositionsverfahren

$$\bar{z} = \bar{Z}\bar{c} + \bar{z}_p$$

$\bar{Z}$ : Fundamentalmatrix.  $\bar{c}$ : Konstantenvektor.  $\bar{z}_p$ : partikuläre Lösung. Alle Größen außer  $\bar{c}$  sind Zeitfunktionen. Die Lösung setzt sich aus der partikulären Lösung  $\bar{z}_p$  und der Ausgleichslösung zusammen. Gilt nicht für den Fall mehrfacher Eigenwerte!

### Eigenwerte und Eigenvektoren der Systemmatrix

$$\lambda \bar{e} = \bar{A}\bar{e}$$

Eigenvektoren  $\bar{e}$  und Eigenwerte  $\lambda$  der Matrix  $\bar{A}$  sind durch Lösung des nebenstehenden Matrixeigenwertproblems zu beschaffen.

### Fundamentalmatrix

$$\bar{Z} = (\bar{e}_1 e^{\lambda_1 t} \quad \bar{e}_2 e^{\lambda_2 t} \quad \dots \quad \bar{e}_n e^{\lambda_n t})$$

Die Spalten der Fundamentalmatrix sind jederzeit eigenvektorparallel.  $\lambda_{1,2,\dots,n}$ : Eigenwerte.  $\bar{e}_{1,2,\dots,n}$ : Eigenvektoren. Typ der Matrix:  $n \times n$ . Gilt nicht für den Fall mehrfacher Eigenwerte!

### Erzwungene oder partikuläre Lösung

$$\bar{z}_p$$

Jede Lösung, welche die DGl. erfüllt, heißt partikulär oder erzwungen. Sie ist oft vom Zeitverlaufstyp der Anregung und braucht den Anfangsvektor nicht zu erfüllen. Für ein Netzwerk ohne Quellen gilt  $\bar{z}_p = 0$ .

**Konstantenvektor**

$$\overline{\overline{Z}}(0)\overline{c} = \overline{z}(0) - \overline{z}_p(0)$$

Der Konstantenvektor  $\overline{c}$  folgt aus dem nebenstehenden linearen Gleichungssystem mit den Anfangswerten  $\overline{z}(0)$  des Problems,  $\overline{\overline{Z}}(0)$  der Fundamentalmatrix und  $\overline{z}_p(0)$  der erzwungenen Lösung. Im Fall  $\overline{z}(0) = \overline{z}_p(0)$  gilt  $\overline{c} = 0$ , d. h. es tritt kein Ausgleichsvorgang auf.

## A. Mathematik

### A.1. Kreisfunktionen

#### A.1.1. Sinus, Cosinus, Tangens und Cotangens

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \tan \alpha = \frac{a}{b} \quad \cot \alpha = \frac{b}{a}$$

Bezeichnungen siehe Bild bei [A.3](#).

#### A.1.2. Eigenschaften und Verknüpfungen

##### Symmetrie

$$\sin \alpha = -\sin(-\alpha) \quad \cos \alpha = \cos(-\alpha)$$

##### Sinus, Cosinus und Tangens

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

##### Orthogonalität

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \cos \alpha \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha\right) = \mp \sin \alpha$$

##### Summe und Differenz zweier Winkel

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

##### Winkelverdopplung

$$\begin{aligned} \sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \\ \sin 2\alpha &= \frac{2 \tan \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} & \cos 2\alpha &= \frac{1 - \tan^2 \alpha}{1 + \tan^2 \alpha} \end{aligned}$$

##### Summe und Differenz zweier Funktionen

$$\begin{aligned} \sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} & \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha+\beta}{2} \cos \frac{\alpha-\beta}{2} & \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \sin \frac{\alpha-\beta}{2} \end{aligned}$$

##### Produkte von Sinus und Cosinus

$$\begin{aligned} \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)] \\ \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)] \\ \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \end{aligned}$$

##### Quadrat von Sinus und Cosinus

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

##### Komplexe Darstellung von Sinus und Cosinus

$$\sin \alpha = \frac{1}{2j}(e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}) \quad \cos \alpha = \frac{1}{2}(e^{j\alpha} + e^{-j\alpha})$$

Kreisfunktionswerte für besondere Winkel: siehe Tabellenanhang D.2

## A.2. Koordinatensystem im Ortsraum

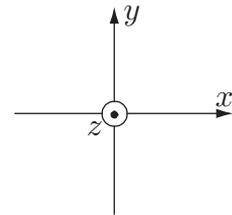
### A.2.1. Einheitsvektor

Der Einheitsvektor  $\vec{e}_k$  zur Koordinate  $k$  im Punkt  $P$  führt mit einem Schritt der Länge eins in die Richtung, in der sich die  $k$ -Koordinate vergrößert und die beiden anderen konstant bleiben.

### A.2.2. Kartesische Koordinaten

$x, y, z$

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System. Sie sind koordinatenunabhängig.



### A.2.3. Zylinderkoordinaten

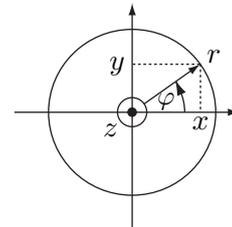
$r, \varphi, z$

$$x = r \cos \varphi$$

$$y = r \sin \varphi$$

$$z = z$$

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$  bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System. Nur  $\vec{e}_z$  ist koordinatenunabhängig.



### A.2.4. Kugelkoordinaten

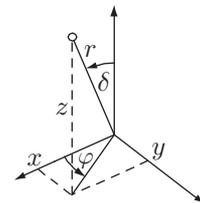
$r, \delta, \varphi$

$$x = r \sin \delta \cos \varphi$$

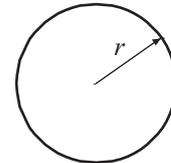
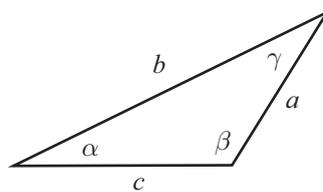
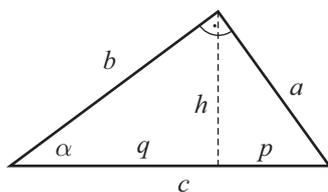
$$y = r \sin \delta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \delta$$

Die Einheitsvektoren  $\vec{e}_r, \vec{e}_\delta, \vec{e}_\varphi$  bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System. Sie sind koordinatenabhängig.



## A.3. Dreieck, Kreis und Kugel



**Satz des Pythagoras und Höhensatz im rechtwinkligen Dreieck**

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$h^2 = pq$$

**Sinus- und Cosinussatz im schiefwinkligen Dreieck**

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

### Winkelsumme und Fläche im schiefwinkligen Dreieck

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

$$A = \frac{sh}{2}$$

mit

$s$  = Seitenlänge.  $h$ =Höhe auf der Seite

### Kreisumfang und -flächeninhalt

$$U = 2\pi r$$

$$A = \pi r^2$$

### Kugeloberfläche und Volumen

$$A = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4\pi}{3}r^3$$

### A.4. Nullstellen der quadratischen Funktion

$$f(x) = x^2 + px + q$$

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

### A.5. Vektoren

#### A.5.1. Schreibweisen

$$\vec{A} = A_x \vec{e}_x + A_y \vec{e}_y + A_z \vec{e}_z = \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix}$$

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ : Einheitsvektoren,  $A_x, A_y$  und  $A_z$ : Koordinaten,  $A_x \vec{e}_x, A_y \vec{e}_y, A_z \vec{e}_z$ : Komponenten des Vektors  $\vec{A}$ . Koordinaten sind Skalare, Komponenten Vektoren.

#### A.5.2. Betrag und Einheitsvektor

$$|\vec{A}| = A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$$

$$\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A} \quad \text{mit} \quad |\vec{e}_A| = 1$$

#### A.5.3. Gleichheit

$$\vec{A} = \vec{B} \iff A_x = B_x, \quad A_y = B_y, \quad A_z = B_z$$

#### A.5.4. Addition und Multiplikation mit einem Skalar

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{pmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{pmatrix}$$

$$c\vec{A} = \vec{A}c = \begin{pmatrix} cA_x \\ cA_y \\ cA_z \end{pmatrix}$$

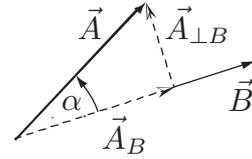
#### A.5.5. Skalarprodukt

$$\vec{A}\vec{B} = \vec{B}\vec{A} = AB \cos \alpha = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = A_B B = A_B A$$

$\alpha$ =Winkel zwischen  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$ .  $A_B$ : B-Koordinate von  $\vec{A}$ .  $B_A$ : A-Koordinate von  $\vec{B}$  (s. u.). Das Skalarprodukt  $\vec{A}\vec{B}$  ist ein Skalar.

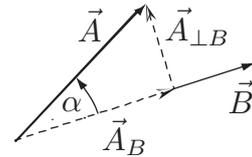
### A.5.6. Koordinate und Komponente eines Vektors in Richtung eines anderen Vektors

$$A_B = \vec{A}\vec{e}_B = A \cos \alpha \quad \text{bzw.} \quad \vec{A}_B = A_B \vec{e}_B$$



### A.5.7. Orthogonale Zerlegung eines Vektors zur Basis eines anderen

$$\vec{A} = \vec{A}_B + \vec{A}_{\perp B} = \vec{e}_B (\vec{A}\vec{e}_B) + \vec{e}_B \times (\vec{A} \times \vec{e}_B)$$



### A.5.8. Vektorprodukt

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{pmatrix} A_y B_z - A_z B_y \\ A_z B_x - A_x B_z \\ A_x B_y - A_y B_x \end{pmatrix} = \vec{C} \quad \text{mit} \quad C = |\vec{C}| = AB \sin \alpha$$

$\vec{C}$  steht senkrecht auf  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$ .  $\vec{A}$ ,  $\vec{B}$  und  $\vec{C}$  bilden in dieser Reihenfolge ein rechtshändiges System.  $\alpha$ : Winkel zwischen  $\vec{A}$  und  $\vec{B}$  mit  $0 \leq \alpha \leq \pi$ . Das Vektorprodukt heißt auch Kreuzprodukt.

## A.6. Komplexe Größen

### A.6.1. Kartesische, polare und Euler'sche Darstellung

$$\underline{A} = A_1 + j A_j \quad \text{bzw.} \quad \underline{A} = A(\cos \alpha + j \sin \alpha) \quad \text{bzw.} \quad \underline{A} = A e^{j\alpha}$$

$A_1 = \text{Re}\underline{A}$ : Realteil von  $\underline{A}$ .  $A_j = \text{Im}\underline{A}$ : Imaginärteil von  $\underline{A}$ .  $A = |\underline{A}|$ : Betrag von  $\underline{A}$ .  $\alpha$ : Winkel zwischen  $\underline{A}$  und der reellen Achse.  $j = \sqrt{-1}$ : imaginäre Einheit

### A.6.2. Realteil und Imaginärteil

$$A_1 = \text{Re}\underline{A} \quad \text{bzw.} \quad A_j = \text{Im}\underline{A}$$

$A_1$ : Realteil von  $\underline{A}$ ,  $A_j$ : Imaginärteil von  $\underline{A}$ . Der Imaginärteil ist reell.

### A.6.3. Betrag

$$A = |\underline{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_j^2} \quad \begin{array}{l} A: \text{ Betrag} \quad \text{von} \quad \underline{A}. \quad A_1 \quad \text{und} \quad A_j: \\ \text{Real-} \quad \quad \quad \text{bzw.} \quad \text{Imaginärteil} \quad \text{von} \quad \underline{A}. \end{array}$$

#### A.6.4. Winkel

$$\alpha = \text{Arc}\underline{A} = \text{Arctan} \frac{A_j}{A_1} + \begin{cases} 0, & \text{wenn } A_1 > 0 \\ \pi, & \text{wenn } A_1 < 0 \end{cases}$$

$\alpha$ : Winkel zwischen  $\underline{A}$  und der reellen Achse.  $A_1$ : Realteil von  $\underline{A}$ .  $A_j$ : Imaginärteil von  $\underline{A}$ .

#### A.6.5. Multiplikation mit einer reellen Konstanten und Summe oder Differenz zweier komplexer Größen

$$c\underline{A} = cA_1 + j cA_j = cA e^{j\alpha} \qquad \underline{A} \pm \underline{B} = (A_1 \pm B_1) + j (A_j \pm B_j)$$

#### A.6.6. Produkt

$$\underline{A}\underline{B} = \underline{B}\underline{A} = A_1B_1 - A_jB_j + j (A_1B_j + A_jB_1) = AB e^{j(\alpha+\beta)}$$

#### A.6.7. Quotient

$$\frac{\underline{A}}{\underline{B}} = \frac{A_1B_1 + A_jB_j}{B_1^2 + B_j^2} + j \frac{A_jB_1 - A_1B_j}{B_1^2 + B_j^2} = \frac{A}{B} e^{j(\alpha-\beta)}$$

#### A.6.8. Kehrwert und Potenz mit reellem Exponenten

$$\frac{1}{\underline{A}} = \frac{\underline{A}^*}{A^2} = \frac{A_1 - j A_j}{A_1^2 + A_j^2} = \frac{1}{A} e^{-j\alpha} \qquad \underline{A}^n = A^n e^{jn\alpha} = A^n (\cos n\alpha + j \sin n\alpha)$$

#### A.6.9. Wurzel

$$\sqrt[n]{\underline{A}} = \sqrt[n]{A} e^{j \frac{\alpha + k2\pi}{n}} = \sqrt[n]{A} \left( \cos \frac{\alpha + k2\pi}{n} + j \sin \frac{\alpha + k2\pi}{n} \right)$$

#### A.6.10. Natürlicher Logarithmus

$$\ln \underline{A} = \ln A + j \alpha$$

#### A.6.11. Ungedämpfte Schwingung

$$A \cos(\omega t + \alpha) = A_1 \cos \omega t - A_j \sin \omega t = \frac{\underline{A} e^{j\omega t} + (\underline{A} e^{j\omega t})^*}{2} \quad \text{mit } \underline{A} = A e^{j\alpha} = A_1 + j A_j$$

#### A.6.12. Gedämpfte Schwingung

$$A e^{B_1 t} \cos(B_j t + \alpha) = \frac{\underline{A} e^{Bt} + (\underline{A} e^{Bt})^*}{2} \quad \text{mit } \underline{A} = A e^{j\alpha} \quad \text{und } \underline{B} = B_1 + j B_j$$

#### A.6.13. Transformation harmonischer Schwingungen in komplexe Größen

Zeitbereich Komplexe Ebene

##### Definition von ruhenden Effektivwertzeigern

$$\begin{aligned} a &= A\sqrt{2} \cos(\omega t + \alpha) & \Leftrightarrow \underline{A} &= A e^{j\alpha} \\ b &= B\sqrt{2} \cos(\omega t + \beta) & \Leftrightarrow \underline{B} &= B e^{j\beta} \end{aligned}$$

## Summe und Differenz harmonischer Schwingungen

$$a \pm b \quad \Leftrightarrow \underline{A} \pm \underline{B}$$

## Differentiation harmonischer Schwingungen

$$\frac{da}{dt} \quad \Leftrightarrow j \omega \underline{A}$$

## Integration harmonischer Schwingungen

$$\int a dt \quad \Leftrightarrow \frac{\underline{A}}{j\omega}$$

## A.7. Differentiation

### A.7.1. Produkt- und Quotientenregel

$$\frac{d(uv)}{dx} = \frac{du}{dx}v + u\frac{dv}{dx} \quad \frac{d\frac{u}{v}}{dx} = \frac{\frac{du}{dx}v - u\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

### A.7.2. Kettenregel

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} \quad \text{mit} \quad u(v) \quad \text{und} \quad v(x)$$

## A.8. Integration

### A.8.1. Integration durch Substitution und partielle Integration

$$\int u(x) dx = \int u(x) \frac{dx}{dt} dt \quad \text{bzw.} \quad \int \frac{du}{dx} v dx = uv - \int u \frac{dv}{dx} dx$$

## A.9. Euler'sches Rückwärtsverfahren

$$f\left(\frac{d\bar{z}}{dt}, \bar{z}, t\right) = 0 \quad \text{Oben: Vektordifferentialgleichung. Unten: Zugehöriges algebraisches Gleichungssystem.}$$

$$f\left(\frac{{}^1\bar{z} - {}^0\bar{z}}{h}, {}^1\bar{z}, {}^1t\right) = 0 \quad \begin{array}{l} \bar{z}: \text{Zustandsvektor. } h: \text{Integrationsschrittweite. } {}^0t \text{ und } \\ {}^1t: \text{Zeitpunkte am Beginn bzw. Ende des } h\text{-Intervalls.} \\ {}^0\bar{z} = \bar{z}({}^0t) \text{ und } {}^1\bar{z} = \bar{z}({}^1t). \end{array}$$

## A.10. Integrale und Ableitungen für Vektor- und Skalarfelder

### A.10.1. Integrationsbereiche

Die Integrationsbereiche der folgenden Integrale bedeuten:  $\mathcal{V}$ : Volumen,  $\mathcal{A}$ : Fläche,  $\mathcal{S}$ : Kurve,  $\partial\mathcal{V}$ : Oberfläche des Volumens  $\mathcal{V}$ ,  $\partial\mathcal{A}$ : Randkurve der Fläche  $\mathcal{A}$ . Sie können materielle Objekte (Körper, Blätter, Fäden) oder gedachte Bilanzfiguren darstellen.  $\mathcal{V}$ ,  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{S}$  sind nicht mit dem Inhalt eines Volumens bzw. einer Fläche bzw. der Länge einer Kurve zu verwechseln.

### A.10.2. Integrale

#### Linienintegral

$$L = \int_{\mathcal{S}} \vec{v} d\vec{s} = \int_{\mathcal{S}} v_t d\vec{s} = \int_{\mathcal{S}} v \cos \alpha ds = \bar{v}_t l \quad (\text{A.10.1})$$

$\mathcal{S}$ : Orientierte Raumkurve mit Anfangs- und Endpunkt.  $\vec{v}$ : Feldvektor.  $v$ : Betrag des Feldvektors.  $d\vec{s}$ : vektorielles Wegelement, tangential an Kurve und zum Endpunkt orientiert.  $v_t$ : Koordinate von  $\vec{v}$  in Richtung von  $d\vec{s}$  (Tangentialkoordinate).  $\alpha = \angle(\vec{v}, d\vec{s})$ .  $\bar{v}_t$ : Durchschnitt von  $v_t$  längs der Kurve.  $l = \int_{\mathcal{S}} ds = \text{Länge der Kurve}$

*Beispiel* Das Linienintegral der Kraft ist gleich der von der Kraft längs des Weges geleistete Arbeit.

*Sonderfall* Der Integrationsweg verläuft längs der  $s$ -Achse von Koordinate  $s_1$  nach  $s_2$  (gerader Weg):  $L = \vec{e}_s \int_{s_1}^{s_2} \vec{v} ds$  mit  $\vec{e}_s = \text{Einheitsvektor in Richtung der } s\text{-Achse}$

*Sonderfall* Homogenes Feld und beliebiger Integrationsweg:  $L = \vec{v} \vec{s}$  mit  $\vec{s}$ : Schrittvektor vom Anfangs- zum Endpunkt des Weges

#### Umlaufintegral

$$C = \oint \vec{v} d\vec{s} = \int_{\partial\mathcal{A}} \vec{v} d\vec{s} \quad (\text{A.10.2})$$

$\partial\mathcal{A}$ : Geschlossene orientierte Raumkurve.  $\vec{v}$ : Feldvektor.  $d\vec{s}$ : vektorielles Wegelement, tangential an Kurve unter Beachtung der Orientierung. Ein Linienintegral heißt Umlaufintegral, wenn der Integrationsweg geschlossen ist.

*Sonderfall* Vektorfelder, bei denen für beliebige Umläufe  $C = 0$  gilt, heißen konservativ oder wirbelfrei. Homogene Felder sind wegen  $C = \vec{v} \oint d\vec{s} = \vec{v} \vec{0} = 0$  wirbelfrei.

## Skalarpotenzial

$$\varphi(A) = \int_{S_{AB}} \vec{v} d\vec{s} + \varphi(B) \quad (\text{A.10.3})$$

$S_{AB}$ : Beliebige Raumkurve vom Aufpunkt  $A$  zum Bezugspunkt  $B$ .  $\vec{v}$ : Feldvektor.  $d\vec{s}$ : vektoriellies Wegelement.  $\varphi(B)$ : wählbares Bezugspotential. Für wirbelfreie Felder ( $\text{rot}\vec{v} = 0$ ) ist das Skalarpotential eindeutig ( $\rightarrow$ Rotation,  $\rightarrow$ Zirkulation).

## Fluss eines Vektorfelds

$$\Phi = \int_{\mathcal{A}} \vec{v} d\vec{A} = \int_{\mathcal{A}} v_n dA = \int_{\mathcal{A}} v \cos \alpha dA = \bar{v}_n A \quad (\text{A.10.4})$$

$\mathcal{A}$ : Orientierte Fläche im Raum.  $\vec{v}$ : Feldvektor.  $d\vec{A}$ : vektoriellies Flächenelement (Betrag: Flächeninhalt des Elements, Richtung: lokal senkrecht zur Fläche, Orientierung: wählbar, aber überall zur gleichen Seite der Fläche).  $v_n$ : Koordinate von  $\vec{v}$  in Richtung in Richtung von  $d\vec{A}$  (Normalkoordinate).  $\alpha = \angle(\vec{v}, d\vec{A})$ .  $\bar{v}_n$ : Durchschnitt von  $v_n$  in der Fläche.  $A = \int_{\mathcal{A}} dA = \text{Flächeninhalt}$

*Beispiel* Der Fluss  $\Phi$  der Strömungsgeschwindigkeit in m/s ist gleich dem Volumenstrom in m<sup>3</sup>/s.

*Sonderfall* Homogenes Feld  $\vec{v}$  und ebene Fläche  $\vec{A}$ :  $\Phi = \vec{A}\vec{v}$

## Hüllenfluss eines Vektorfelds

$$H = \oint \vec{v} d\vec{A} = \oint_{\partial\mathcal{V}} \vec{v} d\vec{A} = \int_{\partial\mathcal{V}} \vec{v} d\vec{A} \quad (\text{A.10.5})$$

$\partial\mathcal{V}$ : Oberfläche eines Volumens.  $\vec{v}$ : Feldvektor.  $d\vec{A}$ : vektoriellies Flächenelement (Betrag und Richtung: wie bei Fluss eines Vektorfelds, Orientierung: nach außen).

*Beispiel* Der Hüllenfluss der Strömungsgeschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit ist gleich null; was durch einen Teil der Oberfläche einströmt, fließt durch die restliche wieder ab.

## Fluss eines Skalarfelds

$$\vec{F} = \int_{\mathcal{A}} p d\vec{A} \quad (\text{A.10.6})$$

$\mathcal{A}$ : Orientierte Fläche im Raum.  $p$ : skalares Feld.  $d\vec{A}$ : vektoriellies Flächenelement, wie bei Fluss eines Vektorfelds.

*Beispiel* Der Fluss einer mechanischen Normalspannung (Skalarfeld) ist gleich der Normalkraft auf die Fläche.

### Hüllenfluss eines Skalarfelds

$$\vec{H} = \oint p d\vec{A} = \oint_{\partial\mathcal{V}} p d\vec{A} = \int p d\vec{A} \quad (\text{A.10.7})$$

$p$ : Skalarfeld.  $\partial\mathcal{V}$  und  $d\vec{A}$ : Wie bei Hüllenfluss eines Vektorfelds

*Beispiel* Der Hüllenfluss der Normal-Druckspannung ( $p < 0$ ), die auf einen untergetauchten Körper wirkt, ist gleich seiner Auftriebskraft.

### A.10.3. Ableitungen von Vektor- und Skalarfeldern

Im Folgenden sind die Begriffe Gradient (grad), Divergenz (div) und Rotation (rot) koordinatensystem-unabhängig als Volumenableitungen definiert. Daraus folgen (hier nicht dargestellte) verschiedene Formeln für verschiedene Koordinatensysteme.

#### Gradient eines Skalarfelds

##### Definition als Volumenableitung

$$\text{grad}p = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial\mathcal{V}} p d\vec{A} \quad (\text{A.10.8})$$

Die Integration erstreckt sich über die Oberfläche  $\partial\mathcal{V}$  eines genügend kleinen Volumens  $\mathcal{V}$ , das den Aufpunkt enthält. Bezeichnungen:  $\rightarrow$ Hüllenfluss eines Skalars.  $V$ : Volumeninhalt von  $\mathcal{V}$

Der Vektor  $\text{grad}p$  ist ein aus dem Skalarfeld  $p$  gebildeter Vektor. Er hängt vom Verlauf des Felds in unmittelbarer Nachbarschaft des Aufpunktes ab. Er steht senkrecht auf den Flächen  $p = \text{konst}$  (Äquipotenzialflächen) und ist zum größeren  $p$  hin orientiert. Er zeigt in die Richtung des steilsten Anstiegs von  $p$ .

##### Koordinatenweise Definition

$$(\text{grad}p)_s = \frac{\partial p}{\partial s} \quad (\text{A.10.9})$$

$(\text{grad}p)_s$ :  $s$ -Koordinate von  $\text{grad}p$ . Das Zeichen  $\partial$  steht für die partielle Ableitung. *Sonderfall* Wenn die  $s$ -Achse im Aufpunkt eine Äquipotenzialfläche tangiert (tangential verlaufende Koordinatenachse  $t$ ) gilt  $(\text{grad}p)_t = 0$ .

##### Betrag und Richtung des Gradienten

$$|\text{grad}p| = (\text{grad}p)_n \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_{\text{grad}p} = \vec{e}_n. \quad (\text{A.10.10})$$

Die  $n$ -Achse ist diejenige durch den Aufpunkt verlaufende Koordinatenachse, für die der Ausdruck  $\frac{\partial p}{\partial n}$  maximal wird.  $\vec{e}_n$ : zugehöriger Einheitsvektor

## Rotation eines Vektorfelds

### Definition als Volumenableitung

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} d\vec{A} \times \vec{v} \quad (\text{A.10.11})$$

Die Integration erstreckt sich über die Oberfläche  $\partial \mathcal{V}$  eines genügend kleinen Volumens  $\mathcal{V}$ , das den Aufpunkt enthält. Bezeichnungen:  $\rightarrow$ Hüllenfluss eines Vektorfelds.  $V$ : Inhalt von  $\mathcal{V}$ . Der Vektor  $\operatorname{rot} \vec{v}$  ist ein dem Vektorfeld  $\vec{v}$  in jedem Aufpunkt zugeordneter weiterer Vektor. Er hängt vom Verlauf des Felds in unmittelbarer Nachbarschaft des Aufpunktes ab. Felder mit  $\operatorname{rot} \vec{v} \neq \vec{0}$  heißen Wirbelfelder. Felder mit  $\operatorname{rot} \vec{v} = \vec{0}$  sind wirbelfrei. Der Vektor  $\operatorname{rot} \vec{v}$  ist ein Maß für das Drehmoment, welches das Feld  $\vec{v}$ , umgedeutet in ein Geschwindigkeitsfeld, auf eine kleine Kugel in der Strömung beim Aufpunkt ausüben würde. Nur die zu den Flächenelementen  $d\vec{A}$  der Hülle tangentialen Feldkomponenten liefern einen Beitrag zu  $\operatorname{rot} \vec{v}$ .

### Koordinatenweise Definition

$$(\operatorname{rot} \vec{v})_A = \lim_{A \rightarrow 0} \frac{1}{A} \oint_{\partial A} \vec{v} \, d\vec{s} \quad (\text{A.10.12})$$

$(\operatorname{rot} \vec{v})_A$ :  $A$ -Koordinate von  $\operatorname{rot} \vec{v}$ . Das Umlaufintegral erstreckt sich über den Rand  $\partial A$  einer genügend kleinen ebenen Fläche  $A$ , die den Aufpunkt enthält. Ihr Inhalt und ihre Richtung sind durch den Flächenvektor  $\vec{A}$  festgelegt. Die Orientierungen von  $d\vec{s}$  und  $\vec{A}$  sind rechtshändig zu koordinieren. Bezeichnungen:  $\rightarrow$ Umlaufintegral.

### Betrag und Richtung der Rotation

$$|\operatorname{rot} \vec{v}| = (\operatorname{rot} \vec{v})_m \quad \text{bzw.} \quad \vec{e}_{\operatorname{rot} \vec{v}} = \vec{e}_m. \quad (\text{A.10.13})$$

Der Einheitsvektor  $\vec{e}_m$  bezeichnet *die* Ausrichtung der Fläche, für welche die zugehörige Zirkulation maximal wird.

## Divergenz eines Vektorfelds

$$\operatorname{div} \vec{v} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \oint_{\partial V} \vec{v} d\vec{A} \quad (\text{A.10.14})$$

Die Integration erstreckt sich über die Oberfläche  $\partial \mathcal{V}$  eines genügend kleinen Volumens  $\mathcal{V}$ , das den Aufpunkt enthält. Bezeichnungen:  $\rightarrow$ Hüllenfluss eines Vektorfelds.  $V$ : Inhalt von  $\mathcal{V}$

Der Ausdruck  $\operatorname{div} \vec{v}$  ist ein dem Vektorfeld  $\vec{v}$  in jedem Aufpunkt zugeordneter Skalar. Sein Wert hängt vom Verlauf des Felds in unmittelbarer Nachbarschaft des Aufpunktes ab. Felder mit  $\operatorname{div} \vec{v} \neq 0$  heißen Quellenfelder. Felder mit  $\operatorname{div} \vec{v} = 0$  sind quellenfrei.

*Beispiel* Die Strömungsgeschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit ist quellenfrei ( $\rightarrow$ Hüllenfluss eines Vektorfelds).

*Beispiel* Wenn  $\vec{v}$  eine Wärmestromdichte (in  $\text{W}/\text{m}^2$ ) ist, gibt der Vektor  $\operatorname{rot} \vec{v}$  die Wärmequellendichte (in  $\text{W}/\text{m}^3$ ) am gleichen Ort an.

### A.10.4. Integralsätze

#### Integralsatz von Gauß

$$\int_{\mathcal{V}} \operatorname{div} \vec{v} dV = \oint_{\partial \mathcal{V}} \vec{v} d\vec{A} \quad (\text{A.10.15})$$

$\mathcal{V}$ : Bilanzraum. Das Hüllenintegral erstreckt sich über die Oberfläche  $\partial \mathcal{V}$  (Hülle) des Bilanzraums  $\mathcal{V}$ . Bezeichnungen:  $\rightarrow$ Hüllenfluss eines Vektorfelds. Der Gauß'sche Satz bietet eine besondere Möglichkeit, den Hüllenfluss eines Vektorfelds (linke Seite) als Volumenintegral (rechte Seite) zu berechnen.

#### Integralsatz von Stokes

$$\int_{\mathcal{A}} \operatorname{rot} \vec{v} d\vec{A} = \oint_{\partial \mathcal{A}} \vec{v} d\vec{s} \quad (\text{A.10.16})$$

$\mathcal{A}$ : Beliebige Bilanzfläche, die den Umlaufweg  $\partial \mathcal{A}$  als Rand hat. Die Orientierungen von  $d\vec{A}$  und  $d\vec{s}$  sind rechtshändig zu koordinieren. Bezeichnungen:  $\rightarrow$ Umlaufintegral. Bei bewegten Flächen gilt die momentane Fläche und der momentane Rand.

## Zwei weitere Integralsätze

$$\int_{\mathcal{V}} \text{grad} p \, dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} p \, d\vec{A} \qquad \int_{\mathcal{V}} \text{rot} \vec{v} \, dV = \oint_{\partial\mathcal{V}} d\vec{A} \times \vec{v} \quad (\text{A.10.17})$$

$p$ : Potenzial. Weitere Bezeichnungen:  $\rightarrow$  Integralsatz von Gauß. Der Gauß'sche Satz Gl. A.10.15 und die beiden weiteren (manchmal ebenfalls nach Gauß benannten) Sätze Gl. A.10.17 folgen nach gleichem Muster aus den Hüllenintegral-Definitionen von  $\text{div} \vec{v}$ ,  $\text{grad} p$  bzw.  $\text{rot} \vec{v}$ .

### A.10.5. Helmholtz'sches Theorem

$$\begin{aligned} \vec{v} = & -\text{grad} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{div} \vec{v}}{a} \, dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{\vec{v} \, d\vec{A}}{a} \right) \\ & + \text{rot} \left( \frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}} \frac{\text{rot} \vec{v}}{a} \, dV - \frac{1}{4\pi} \oint_{\partial\mathcal{V}} \frac{d\vec{A} \times \vec{v}}{a} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.10.18})$$

Berechnung eines Felds  $\vec{v}$  aus seinen Quellen, seinen Wirbeln und seinen Randwerten.

$\mathcal{V}$ : Volumen, in dem die Quelledichte  $\text{div} \vec{v}$  und die Wirbeldichte  $\text{rot} \vec{v}$  herrschen.  $\partial\mathcal{V}$ : Oberfläche von  $\mathcal{V}$ , auf der mit  $\vec{v} \, d\vec{A} = v_n \, dA$  und  $d\vec{A} \times \vec{v} = v_t \, dA (\vec{e}_n \times \vec{e}_t)$  die Normal- und Tangentialkoordinaten  $v_n$  bzw.  $v_t$  des Felds  $\vec{v}$  bekannt sind.  $a$ : Abstand zwischen Aufpunkt und dem Ort des Integrationselements  $dV$  bzw.  $d\vec{A}$ . Das Randfeld muss den Gauß'schen Integralsatz Gl. A.10.15 und den rechten Integralsatz von Gl.-Zeile A.10.17 erfüllen.

## B. Mechanik

### B.1. Bewegung eines Punktes im Raum

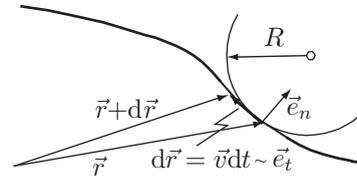
$$\vec{r}$$

$$\vec{v} = v\vec{e}_t$$

$$\vec{b} = \vec{b}_t + \vec{b}_n = v\dot{\vec{e}}_t + \frac{v^2}{R}\vec{e}_n$$

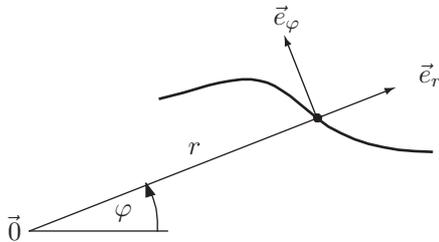
$\vec{r}, \vec{v}, \vec{b}$ : Ortsvektor, Geschwindigkeit und Beschleunigung des Punktes im Raum.

$v = |\vec{v}|$ : Bahngeschwindigkeit.  $\vec{e}_t$ : Tangenteneinheitsvektor.  $\vec{e}_n$ : Normaleneinheitsvektor, zum Krümmungsmittelpunkt gerichtet.  $R$ : Krümmungsradius.  $\vec{b}_t$ : Tangentialbeschleunigung.  $\vec{b}_n$ : Zentripetalbeschleunigung

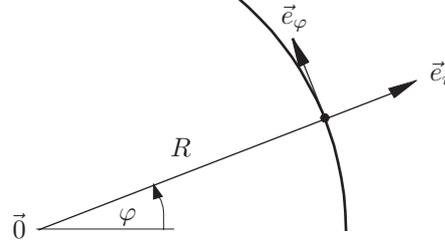


### B.2. Bewegung eines Punktes in der Ebene

Allgemein



Kreisbewegung auf Radius  $R$



#### B.2.1. Bahnkurve

$$\vec{r} = r\vec{e}_r$$

$$\vec{r} = R\vec{e}_r$$

#### B.2.2. Geschwindigkeit

$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{v} = R\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi = v\vec{e}_\varphi$$

#### B.2.3. Beschleunigung

$$\vec{b} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{b} = -R\dot{\varphi}^2\vec{e}_r + R\ddot{\varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{b} = \vec{b}_r + \vec{b}_\varphi$$

$$\vec{b} = \vec{b}_r + \vec{b}_\varphi$$

$v = |\vec{v}|$ : Bahngeschwindigkeit.  $\vec{b}_\varphi$ : Tangentialbeschleunigung.  $\vec{b}_r$ : Zentripetalbeschleunigung. Es gilt  $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi$  und  $\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\vec{e}_r$ .

### B.3. Winkelgeschwindigkeit und Winkelbeschleunigung

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{bzw.} \quad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

## B.4. Kraft, Moment, Energie und Leistung

Translation

Rotation

### B.4.1. Masse und Massenträgheitsmoment als Trägheitsgröße

$m$

$$J = \int_{\text{Körper}} r^2 dm$$

### B.4.2. Bewegungsgleichung

$$F = m \frac{dv}{dt}$$

$$M = J \frac{d\omega}{dt}$$

### B.4.3. Rückstellereffekt von Federelementen

$$F = -cs$$

$$M = -c_d \varphi$$

### B.4.4. Widerstandereffekt von Dämpfungselementen

$$F = -dv$$

$$M = -d_d \omega$$

### B.4.5. Arbeit bei geführter Bewegung

$$W = \int_{\text{Führungsweg}} F ds$$

$$W = \int_{\text{Führungswinkel}} M d\varphi$$

### B.4.6. Potentielle Energie einer Feder

$$W_p = \frac{1}{2} cs^2$$

$$W_p = \frac{1}{2} c_d \varphi^2$$

### B.4.7. Kinetische Energie

$$W_k = \frac{1}{2} mv^2$$

$$W_k = \frac{1}{2} J \omega^2$$

### B.4.8. Leistung

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv$$

$$P = \frac{dW}{dt} = M\omega$$

## C. Wärmelehre

### C.1. Wärmestrom

$$P = \frac{\Delta\vartheta}{R}$$

$P$ : Wärmestrom (Leistung).  $\Delta\vartheta$ : Temperaturdifferenz, Erwärmung, Übertemperatur.  $R$ : Wärmewiderstand

### C.2. Wärmewiderstände

#### C.2.1. Stab

$$R = \frac{l}{\lambda A}$$

$l$ : Stablänge.  $A$ : Stabquerschnitt.  $\lambda$ : spezifische Wärmeleitfähigkeit

#### C.2.2. Zylinderschale

$$R = \frac{1}{2\pi\lambda L} \ln \frac{r_a}{r_i}$$

$L$ : Zylinderlänge.  $\lambda$ : spezifische Wärmeleitfähigkeit.  $r_i$ : Innenradius.  $r_a$ : Außenradius. Radiale Wärmeströmung

#### C.2.3. Kugelschale

$$R = \frac{1}{4\pi\lambda} \left( \frac{1}{r_i} - \frac{1}{r_a} \right)$$

$\lambda$ : spezifische Wärmeleitfähigkeit.  $r_i$ : Innenradius.  $r_a$ : Außenradius. Zentralsymmetrische Wärmeströmung

#### C.2.4. Konvektion

$$R = \frac{1}{\alpha A}$$

$\alpha$ : Wärmeübergangszahl in  $W/(m^2K)$ .  $A$ : Wärmeübergangsfläche

#### C.2.5. Reihenschaltung

$$R = \sum_{\mu} R_{\mu}$$

$R$ : Ersatzwärmewiderstand.  $R_{\mu}$ : vom gleichen Wärmestrom durchflossene Wärmewiderstände

#### C.2.6. Parallelschaltung

$$\frac{1}{R} = \sum_{\mu} \frac{1}{R_{\mu}}$$

$R$ : Ersatzwärmewiderstand.  $R_{\mu}$ : Wärmewiderstände mit gleicher Temperaturdifferenz

### C.3. Wärmebilanzgleichung homogener Körper und Lösung

$$C_W \frac{d\vartheta}{dt} = P_{zu} - P_{ab} \quad \text{bzw.} \quad \vartheta = \frac{1}{C_W} \int_{t_0}^t (P_{zu} - P_{ab}) dt' + \vartheta_0$$

$\vartheta$ : Körpertemperatur (homogen).  $C_W$ : Wärmekapazität in  $J/K$ .  $P_{zu,ab}$ : zugeführte bzw. abgeführte Leistung (i. A. zeitabhängig).  $\vartheta_0$ : Körpertemperatur zur Zeit  $t_0$ .  $t'$ : Zeit als Integrationsvariable

## D. Tabellen

### D.1. Griechisches Alphabet

$\alpha$	<i>A</i>	Alpha	$\eta$	<i>H</i>	Eta	$\nu$	<i>N</i>	Ny	$\tau$	<i>T</i>	Tau
$\beta$	<i>B</i>	Beta	$\vartheta$	$\Theta$	Theta	$\xi$	$\Xi$	Xi	$\upsilon$	<i>Y</i>	Ypsilon
$\gamma$	<i>Γ</i>	Gamma	$\iota$	<i>I</i>	Jota	$o$	<i>O</i>	Omikron	$\varphi$	$\Phi$	Phi
$\delta$	$\Delta$	Delta	$\kappa$	<i>K</i>	Kappa	$\pi$	<i>Π</i>	Pi	$\chi$	<i>X</i>	Chi
$\varepsilon$	<i>E</i>	Epsilon	$\lambda$	<i>Λ</i>	Lambda	$\rho$	<i>P</i>	Rho	$\psi$	$\Psi$	Psi
$\zeta$	<i>Z</i>	Zeta	$\mu$	<i>M</i>	My	$\varsigma$	$\Sigma$	Sigma	$\omega$	$\Omega$	Omega

### D.2. Werte der Kreisfunktionen für besondere Winkel

		$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
<b>sin</b>	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	1
<b>cos</b>	1	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}$	0
<b>tan</b>	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\infty$
<b>cot</b>	$\infty$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	0

### D.3. Zeichen für Verhältnisgrößen

Sprechweise	Zeichen	Faktor	Sprechweise	Zeichen	Faktor
Per unit	pu	1			
Prozent	%	0,01	Part per billion	ppb	$10^{-9}$
Promille	‰	0,001	Part per trillion	ppt	$10^{-12}$
Part per million	ppm	$10^{-6}$	Part per quadrillion	ppq	$10^{-15}$

#### D.4. SI-Basis-Einheiten

Größe	Symbol	Einheit	Symbol
Länge	$l$	Meter	m
Masse	$m$	Kilogramm	kg
Zeit	$t$	Sekunde	s
Elektrische Stromstärke	$i$	Ampere	A
Thermodynamische Temperatur	$T$	Kelvin	K
Lichtstärke	$I$	Candela	cd
Stoffmenge	$n$	Mol	mol

## D.5. Abgeleitete SI-Einheiten

Größe	Sym- bol	Einheit	Sym- bol	Darstellungsvarianten
Drehmoment	$\vec{M}$	Newton-Meter	Nm	$= \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$
Druck, Spannung	$p$	Pascal	Pa	$= \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{m}}$
Ebener Winkel	$\alpha$	Radian	rad	$= \frac{\text{m}}{\text{m}} = 1 = \frac{180^\circ}{\pi}$ $1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ}\text{rad}$
Elektr. Dipolmoment	$\vec{p}$	Coulomb-Meter	Cm	$= \text{As m}$
Elektr. Durchflutung	$\Theta$	Ampere	A	Basiseinheit
Elektr. Feldstärke	$\vec{E}$	Volt/Meter	$\frac{\text{V}}{\text{m}}$	$= \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^3\text{A}}$
Elektr. Fluss	$\Psi$	Coulomb	C	$= \text{As}$
Elektr. Flussdichte	$\vec{D}$	Coulomb/ Quadratmeter	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	$= \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$
Elektr. Leitfähigkeit	$\kappa$	Siemens/Meter	$\frac{\text{S}}{\text{m}}$	$= \frac{1}{\Omega \text{ m}} = \frac{\text{s}^3\text{A}^2}{\text{kg m}^3}$
Elektr. Leitwert	$G$	Siemens	S	$= \frac{1}{\Omega} = \frac{\text{s}^3\text{A}^2}{\text{kg m}^2}$
Elektr. Polarisation	$\vec{P}$	Coulomb/ Quadratmeter	$\frac{\text{C}}{\text{m}^2}$	$= \frac{\text{As}}{\text{m}^2}$
Elektr. Potenzial	$\varphi$	Volt	V	$= \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3\text{A}}$
Elektr. Spannung	$U$	Volt	V	$= \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3\text{A}}$
Elektr. spezifischer Widerstand	$\rho$	Ohm-Meter	$\Omega \text{ m}$	$= \frac{\text{Vm}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^3}{\text{s}^3\text{A}^2}$
Elektr. Strombelag	$A$	Ampere/Meter	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	$= \frac{\text{A}}{\text{m}}$
Elektr. Stromdichte	$\vec{S}$	Ampere/ Quadratmeter	$\frac{\text{A}}{\text{m}^2}$	$= \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$
Elektr. Widerstand	$R$	Ohm	$\Omega$	$= \frac{\text{V}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3\text{A}^2}$
Energie, Arbeit, Wärmemenge	$W$	Joule	J	$= \text{Nm} = \text{Ws} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2}$

### Abgeleitete SI-Einheiten (Fortsetzung)

Größe	Sym- bol	Einheit	Sym- bol	Darstellungsvarianten
Frequenz	$f$	Hertz	Hz	$= \frac{1}{s}$
Impuls	$\vec{p}$	Newton·Sekunde	Ns	$= \frac{\text{kg m}}{s}$
Induktivität	$L$	Henry	H	$= \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2\text{A}^2}$
Kapazität	$C$	Farad	F	$= \frac{\text{C}}{\text{V}} = \frac{\text{As}}{\text{V}} = \frac{\text{A}^2\text{s}^4}{\text{kg m}^2}$
Kraft	$\vec{F}$	Newton	N	$= \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2}$
Ladung	$Q$	Coulomb	C	$= \text{As}$
Leistung	$P$	Watt	W	$= \frac{\text{J}}{s} = \frac{\text{Nm}}{s}$ $= \text{VA} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3}$
Magn. Dipolmoment	$\vec{m}$	Ampere·Quadratmeter	$\text{Am}^2$	$= \text{Am}^2$
Magn. Feldstärke	$\vec{H}$	Ampere/Meter	$\frac{\text{A}}{\text{m}}$	$= \frac{\text{A}}{\text{m}}$
Magn. Fluss	$\Phi$	Weber	Wb	$= \text{Vs} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2\text{A}}$
Magn. Flussdichte Magn. Induktion	$\vec{B}$	Tesla	T	$= \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{A}}$
Magn. Leitwert	$G_m$	Weber/Ampere	H	$= \frac{\text{Wb}}{\text{A}} = \frac{\text{Vs}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2\text{A}^2}$
Magn. Polarisation	$\vec{J}$	Tesla	T	$= \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} = \frac{\text{kg}}{\text{s}^2\text{A}}$
Magn. Skalarpotenzial	$\psi$	Ampere	A	Basiseinheit
Magn. Schwund	$-\frac{d\Phi}{dt}$	Volt	V	$= \frac{\text{J}}{\text{C}} = \frac{\text{W}}{\text{A}} = \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^3\text{A}}$
Magn. Spannung	$V$	Ampere	A	Basiseinheit
Magn. Vektorpotenzial	$\vec{A}$	Tesla·Meter	$\text{Tm}$	$= \frac{\text{Wb}}{\text{m}} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2\text{A}}$
Magn. Widerstand	$R_m$	Henry <sup>-1</sup>	$\text{H}^{-1}$	$= \frac{\text{A}}{\text{Wb}} = \frac{\text{A}}{\text{Vs}} = \frac{\text{s}^2\text{A}^2}{\text{kg m}^2}$

### Abgeleitete SI-Einheiten (Fortsetzung)

Größe	Sym- bol	Einheit	Sym- bol	Darstellungsvarianten
Magnetisierung	$\vec{M}$	Ampere/Meter	$\frac{A}{m}$	$= \frac{A}{m}$
Permeabilität	$\mu$	Henry/Meter	$\frac{H}{m}$	$= \frac{Vs}{Am} = \frac{kg\ m}{s^2 A^2}$
Permittivität	$\epsilon$	Farad/Meter	$\frac{F}{m}$	$= \frac{As}{Vm} = \frac{s^4 A^2}{kg\ m^3}$
Raumladungsdichte	$\rho$	Coulomb/Ku- bikmeter	$\frac{C}{m^3}$	$= \frac{As}{m^3}$
Raumwinkel	$\Omega$	Steradian	sr	$= \frac{m^2}{m^2} = m^0 = 1$
Winkel- geschwindigkeit	$\omega$	Radian/Sekunde	$\frac{rad}{s}$	$= \frac{1}{s}$

### D.6. Einige Einheiten außerhalb des SI

Bar	Kilopond	Kalorie	Gauß	Oerstedt
1bar	1kp	1cal	1G	1Oe
$=10^5 Pa$	$=9,807N$	$=4,1868J$	$=10^{-4}T$	$=79,577 A/m$

### D.7. Vorsätze und Vorsatzzeichen für dezimale Teile und Vielfache

Vorsatz	Vorsatz- zeichen	Zehnerpotenz	Vorsatz	Vorsatz- zeichen	Zehnerpotenz
Yotta	Y	$10^{24}$	Dezi	d	$10^{-1}$
Zetta	Z	$10^{21}$	Zenti	c	$10^{-2}$
Exa	E	$10^{18}$	Milli	m	$10^{-3}$
Peta	P	$10^{15}$	Mikro	$\mu$	$10^{-6}$
Tera	T	$10^{12}$	Nano	n	$10^{-9}$
Giga	G	$10^9$	Piko	p	$10^{-12}$
Mega	M	$10^6$	Femto	f	$10^{-15}$
Kilo	k	$10^3$	Atto	a	$10^{-18}$
Hekto	h	$10^2$	Zepto	z	$10^{-21}$
Deka	da	$10^1$	Yocto	y	$10^{-24}$

## D.8. Stoffwerte

Stoff	Dichte	Spezi- fische Wärme	Wärme- leitfähig- keit	Tempera- turdehn- beiwert	Spez. Leitfä- higkeit	Relat. Permit- tivität	Re- lat. Permea- bilität
	$\frac{\rho}{\text{kg/m}^3}$	$\frac{c_p}{\text{J}/(\text{kg K})}$	$\frac{\lambda}{\text{W}/(\text{m} \cdot \text{K})}$	$\frac{\alpha}{10^{-6} \text{ K}^{-1}}$	$\frac{\kappa}{\text{S/m}}$	$\frac{\epsilon_r}{1}$	$\frac{\mu_r}{1}$
Aluminium	2700	900	240	23	$33 \cdot 10^6$	-	1
Glas	2500	840	0,81	8	$10^{-12}$	4	1
Kupfer	8900	390	400	17	$56 \cdot 10^6$	-	1
Luft	1,3	1000	0,025	1000	$10^{-14}$	1	1
Öl	900	1900	0,13	250	$10^{-12}$	2,7	1
PVC	1400	1500	0,16	240	$10^{-14}$	3	1
Stahl	7800	500	50	12	$10 \cdot 10^6$	-	$1 \dots 10^4$
Wasser, dest.	1000	4200	0,6	100	$50 \cdot 10^{-6}$	80	1

Die Tabelle enthält nur grobe Richtwerte.

## D.9. Naturkonstanten

Naturkonstante	Symbol und Wert	Bemerkung
Avogadro-Konstante	$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	früher Loschmidt'sche Zahl genannt
Elektrische Feldkonstante	$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{As}}{\text{Vm}}$	$\mu_0 \epsilon_0 c_0^2 = 1$
Elektronen-Ruhemasse	$m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$	
Elementarladung	$e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$	
Faraday-Konstante	$F = 96485 \frac{\text{C}}{\text{mol}}$	$F = eN_A$
Gravitations-Konstante	$G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2 \text{ l}}$	$g = 9,81 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$
Magnetische Feldkonstante	$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$	$\mu_0 \epsilon_0 c_0^2 = 1$
Protonen-Ruhemasse	$m_p = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	
Vakuum-Lichtgeschwindigkeit	$c_0 = 299,8 \cdot 10^6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$	$\mu_0 \epsilon_0 c_0^2 = 1$

## Index

- Ableitung
  - Regeln, 59
- Admittanz, 40
- Alphabet
  - griechisches (Tabelle), 69
- Amplitude, 36
- Analogie
  - zwischen elektrostatischem und Strömungsfeld, 21
- Anpassung, *siehe* Leistungsanpassung
- Arbeit
  - bei geführter Bewegung, 67
  - elektrische, 6
- Bandbreite
  - der Widerstandsspannung beim Reihenschwingkreis, 47
- Bewegung
  - eines Punktes im Raum, 66
  - eines Punktes in der Ebene, 66
- Bewegungsgleichung, 67
- Bezugspfeil, 9
- Bezugspfeilsystem
  - Erzeuger-, 9
  - Verbraucher-, 9
- Bezugssinn, 9
- Biot und Savart
  - Formel von, 24
- Blindleistung, 35
  - bei Drehstrom, 48
  - bei harmonischen Größen, 45
  - bei periodischen Größen, 35
- Blindleitwert, 41
- Blindspannung, 44
- Blindstrom, 43
- Blindwiderstand, 41
- Brechungsgesetz
  - für Leitfähigkeitsgrenzflächen, 21
  - für Permeabilitätsgrenzflächen, 27
  - für Permittivitätsgrenzflächen, 14
- Cosinussatz, 55
- Coulomb'sches Gesetz, 17
- Coulomb-Integral, 14
- Coulombkraft, 17
- Dämpfungselement, 67
- Dämpfungsgrad
  - beim Reihenschwingkreis, 46
- Differentiation
  - Regeln, 59
- Dipol
  - elektrischer, 11
  - magnetischer, 22
- Dipolmoment
  - elektrisches, 11
  - magnetisches, 22
    - einer allgemeinen Leiterschleife, 22
    - einer ebenen Leiterschleife, 22
    - eines Punktdipols, 22
    - eines Strömungsgebietes, 22
- Divergenz
  - eines Vektorfelds, 64
- Drehmoment
  - im elektrischen Feld, 17
  - auf elektrischen Punktdipol, 17
  - im Magnetfeld
    - auf Leiterschleife, 31
- Dreieck, 55
- Dreieck-Stern-Umwandlung
  - mit Impedanzen, 42
  - mit Widerständen, 7
- Dreieckschaltung
  - Strang- und Leitergrößen, 48
- Dreiphasensystem, 48
  - symmetrisches, 48
  - unsymmetrisches, 49
- Driftladungsdichte, 19
- Durchflutung
  - elektrische, 27
- Durchflutungssatz, 26
- Effektivwert, 37, 38

Effektivwertzeiger, 58  
 Eigenfrequenz  
   beim Reihenschwingkreis, 47  
 Eigenvektor  
   eines Mehrspeicher-Netzwerks, 52  
 Eigenwert  
   eines Einspeicher-Netzwerks, 51  
   eines Mehrspeicher-Netzwerks, 52  
   eines Reihenschwingkreises, 46  
 Einheit  
   außerhalb des SI (Tabelle), 73  
   SI (Tabelle), 71  
 Elektrostatik, 11  
 Energie  
   einer Spule, 33  
   eines Kondensators, 16  
   elektrische, 6, 13  
   elektrostatische, 16  
   kinetische, 67  
   magnetische, 33  
   potentielle, einer Feder, 67  
 Energiedichte  
   des elektrischen Felds, 16  
   des magnetischen Felds  
     bei linearer Kennlinie, 33  
     bei nichtlinearer Kennlinie, 33  
 Erregung  
   elektrische, *siehe* Flussdichte, elektrische  
   magnetische, *siehe* Feldstärke, magnetische  
 Ersatzspannungsquelle  
   im Gleichstromnetzwerk, 8  
   im Wechselstromnetzwerk, 43  
 Ersatzstromquelle  
   im Gleichstromnetzwerk, 8  
   im Wechselstromnetzwerk, 43  
 Erzeugerpeilsystem, 9  
 ES, *siehe* Erzeugerpeilsystem  
 Euler'sche Darstellung  
   komplexer Größen, 57  
 Euler'sches Rückwärtsverfahren, 59  
 Feder  
   Rückstelleffekt, 67  
 Feld  
   elektrisches Strömungsfeld, 19  
   elektrostatisches, 11  
     im homogenen Raum, 14  
   magnetisches, 22  
     im homogenen Raum, 24  
 Feldenergie  
   magnetische  
     einer linearen Spule, 33  
     einer nichtlinearen Spule, 33  
     eines Spulenpaars, 33  
 Feldkonstante  
   elektrische, 12  
   magnetische, 23  
   Werte, 74  
 Feldstärke  
   elektrische, 12  
     aus elektrischem Potenzial, 15  
   magnetische  
     Berechnung nach Biot und Savart, 24  
     Definition, 23  
     einer kleinen Leiterschleife, 25  
     einer Linienleiterschleife, 25  
     eines geraden Leiters, 25  
 Flächenladung, 11  
 Flächenladungsdichte, 11  
 Fluss  
   eines Skalarfelds, 61  
   eines Vektorfelds, 61  
   elektrischer, 13  
   magnetischer, 23  
 Flussdichte  
   elektrische, 12  
     einer Flächenladung, 15  
     einer Ladungsverteilung, 14  
     einer Linienladung, 15  
     einer Punktladung, 14  
     eines Punktdipols, 15  
   magnetische  
     Definition, 22  
     Quellenfreiheit, 26  
 Flussregel, 28  
 Formfaktor, 37  
 Fourier-Koeffizient

komplexer, 38  
 Fourier-Reihe, 37  
 Frequenz, 36  
 Frequenz-Bandbreite  
   der Widerstandsspannung  
   beim Reihenschwingkreis, 47  
 Fundamentalmatrix, 52  
  
 Gauß'scher Integralsatz, 64  
 Gauß'scher Satz der Elektrostatik,  
   13  
 Gegeninduktivität eines Spulenpaa-  
   res, 29  
 Gleichanteil, 37  
 Gleichrichtwert, 37  
 Gleichstromnetzwerke, 5  
 Gleichung  
   quadratische, 56  
 Gradient  
   eines Skalarfelds, 62  
 Grenzfläche  
   der Leitfähigkeit, 20  
   der Permeabilität, 27  
   der Permittivität, 14  
 Griechisches Alphabet  
   Tabelle der Zeichen, 69  
 Grundfrequenz, 37  
 Güte  
   beim Reihenschwingkreis, 47  
  
 Harmonische Größen, 36  
 Helmholtz'sches Theorem, 65  
 Höhensatz, 55  
 Hüllenfluss  
   eines Skalarfelds, 62  
   eines Vektorfelds, 61  
 Hüllensumme, 6, 30  
  
 Impedanz, 40, 41  
   und Admittanz, 40  
 Induktionsgesetz, 27  
 Induktivität, 29  
 Innenwiderstand  
   einer Ersatzquelle, 8  
 Instationärer Vorgang, 51  
 Integralsatz, 65  
   von Gauß, 64  
   von Stokes, 64  
 Integration, 59  
 Inversionskreis, 46  
  
 Kapazität, 16  
   eines Kugelkondensators, 16  
   eines Plattenkondensators, 16  
   eines Zylinderkondensators, 16  
 Kennkreisfrequenz  
   beim Reihenschwingkreis, 47  
 Kennlinienmodell  
   aktiver linearer Zweipole, 8, 42  
 Kettenregel  
   der Differentiation, 59  
 Kirchhoff'sche Sätze, *siehe* Knoten-  
   punktsatz, Maschensatz  
 Klirrfaktor  
   einer Wechselgröße, 39  
 Knotenpunktsatz, Kirchhoff'scher  
   bei beliebigem Zeitverlauf der  
   Ströme, 34  
   für magnetisches Netzwerk, 30  
   im Gleichstromnetzwerk, 6  
   im Strömungsfeld, 20  
   im Wechselstromnetzwerk, 41  
 Kompensationskreisfrequenz  
   beim Reihenschwingkreis, 47  
 Komplexe Größen, 57  
 Kondensator  
   Kapazität, 16  
   Strom-Spannungs-Verhalten, 34  
 Konduktanz, 40  
 Kontinuitätsgleichung  
   des Strömungsfelds, 20  
 Koordinatensystem, 55  
 Kopplung  
   magnetische  
   zweier Spulen, 29  
 Kopplungskoeffizient  
   magnetischer  
   zweier Spulen, 29  
 Kraft  
   im elektrischen Feld, 17  
   auf elektrischen Punktdipol,  
   17  
   auf Elektrode, 17

- auf Permittivitätsgrenzflächen, [17](#)
  - auf Punktladung, [17](#)
  - mit Maxwell'scher Spannung, [18](#)
  - mit virtueller Verschiebung, [18](#)
- im Magnetfeld, [31](#)
  - auf ausgedehnten Leiter, [31](#)
  - auf kleine Leiterschleife, Punktdipol, [31](#)
  - auf Linienleiter, [31](#)
  - auf Permeabilitätsgrenzfläche, [32](#)
  - auf Punktladung, [31](#)
  - auf Strömungsfeldgebiet, [31](#)
  - mit Maxwell'scher Spannung, [32](#)
  - mit virtueller Verschiebung, [33](#)
- Kraftdichte
  - in Raumladung, [17](#)
- Kreis, [55](#)
- Kreisfrequenz, [36](#)
- Kreisfunktion, [54](#)
- Kreisfunktionen
  - besondere Werte (Tabelle), [69](#)
- Kreuzprodukt
  - zweier Vektoren, [57](#)
- Kugel, [55](#)
- Kurzschlussstrom
  - einer Ersatzquelle, [8](#)
- Ladung
  - wahre, [11](#)
- Ladungsdurchsatz, [5](#)
- Ladungserhaltungssatz
  - der Elektrostatik, [13](#)
- Ladungsverteilung, [11](#)
- Leerlaufspannung
  - einer Ersatzquelle, [8](#)
- Leistung, [6](#)
  - bei harmonischen Größen, [44](#)
  - mechanische, [67](#)
  - momentane, eines Mehrleitersystems, [50](#)
- Leistungsanpassung
  - im Gleichstromnetzwerk, [8](#)
  - im Wechselstromnetzwerk, [45](#)
- Leistungsdichte
  - elektrische
    - im Strömungsfeld, [21](#)
- Leitfähigkeit
  - elektrische, [19](#)
- Leitwert
  - elektrischer, [6](#)
  - im Strömungsfeld, [20](#)
  - magnetischer
    - und Selbstinduktivität, [31](#)
- Linienintegral, [60](#)
- Linienladung, [11](#)
- Linienladungsdichte, [11](#)
- Lorentzkraft, [22](#)
- Magnetisierung, [22](#)
- Magnetisierungsstromdichte, [26](#)
- Maschensatz, Kirchhoff'scher
  - bei beliebigem Zeitverlauf der Spannungen, [34](#)
  - im Gleichstromnetzwerk, [6](#)
  - im magnetischen Netzwerk, [30](#)
  - im Strömungsfeld, [20](#)
  - im Wechselstromnetzwerk, [41](#)
  - Zusammenhang mit Induktionsgesetz, [28](#)
- Massenträgheitsmoment, [67](#)
- Mathematik-Anhang, [54](#)
- Maxwell'sche Spannung
  - im elektrischen Feld, [18](#)
  - im magnetischen Feld, [32](#)
- Mechanik-Anhang, [66](#)
- Mischgröße, [37](#)
- Naturkonstanten (Tabelle), [74](#)
- Netzwerk
  - elektrisches
    - lineares, mit harmonischen Quellen, [40](#)
    - mit beliebigem Zeitverlauf der Quellengrößen, [34](#)
    - mit Gleichstrom, [5](#)
  - magnetisches, [30](#)

- mit einem Speicher, 51
- mit mehreren Speichern, 52
- Nullphasenwinkel, 36
- Nullphasenzeit, 37
- Oberflächenstrombelag, 26
- Oberschwingungsgehalt
  - einer Wechselgröße, 39
- Ohm'sches Gesetz, 6
- Orientierung, 10
- Ortskurve, 46
- Parallelschaltung
  - von Admittanzen, 42
  - von Kondensatoren, 16
  - von Widerständen, 7
- Periodendauer, 36
- Periodische Größen, 36
- Permeabilität
  - magnetische, 23
  - relative magnetische, 23
- Permittivität
  - relative elektrische, 12
- Permittivitätsgrenzfläche, 14
- Phasenfolge, 48
- Phasenverschiebungswinkel, 40
- Phasenwinkel, 36
- Polarisation
  - elektrische, 12
  - magnetische, 22
- Polarisationsladungsdichte, 15
- Potenzial
  - elektrisches
    - einer Ladungsverteilung, 14
    - einer Punktladung, 15
    - eines polarisierbaren Körpers, 15
    - eines Punktdipols, 15
    - eines Zweipols, 5
    - Zusammenhang mit Spannung, 13
  - magnetisches, 24
    - skalaress, 24
    - vektorielles, 23
- Produktregel
  - der Differentiation, 59
- Punktdipol
  - elektrischer
    - Dipolmoment, 11
  - magnetischer
    - magnetisches Feld, 25
    - Vektorpotenzial, 25
- Punktladung, 11
- Pythagoras
  - Satz des, 55
- Quellenfreiheit
  - der magnetischen Flussdichte, 26
  - des elektrischen Strömungsfelds, 20
- Quellenspannung, 20
- Quotientenregel
  - der Differentiation, 59
- Raumladung
  - elektrische, 11
- Raumladungsdichte, 11
- Reaktanz, 41
- Reihenschaltung
  - von Impedanzen, 41
  - von Kondensatoren, 16
  - von magnetisch gekoppelten Spulen, 30
  - von Widerständen, 7
- Reihenschwingkreis, 46
- Resistanz, 40
- Resonanzfrequenz
  - beim Reihenschwingkreis, 47
- Richtung, 10
- Richtungssinn, 9
  - physikalischer, 9
- Rotation
  - eines Vektorfelds, 63
- Rückwärtsverfahren
  - Euler'sches, 59
- Scheinleistung
  - bei Drehstrom, 49
  - bei harmonischen Größen, 45
  - bei Wechselstrom, 44
- Scheinleitwert, 40
- Scheinwiderstand, 40

Scheitelfaktor  
   einer harmonischen Größe, 37  
   einer Wechselgröße, 37  
 Schwankungsbereich, 36  
 Schwingung  
   gedämpfte, in komplexer Notation, 58  
   ungedämpfte, in komplexer Notation, 58  
 Schwund  
   magnetischer, 28  
 Selbstinduktivität  
   einer Spule, 29, 41  
   und magnetischer Leitwert, 31  
 SI-System  
   abgeleitete Einheiten (Tabelle), 71–73  
   Basiseinheiten (Tabelle), 70  
 Sinussatz, 55  
 Skalarpotenzial, 61  
   elektrisches, 5  
   magnetisches, 24  
     einer kleinen Leiterschleife, 25  
     einer Linienleiterschleife, 25  
 Skalarprodukt  
   zweier Vektoren, 56  
 Spannung  
   eingeprägte, 20  
   elektrische, 13  
     als Potenzialdifferenz, 13  
     eines Zweipols, 5  
   induzierte, 27  
   magnetische, 24  
     als Potenzialdifferenz, 24  
   motorisch induzierte, 28  
   transformatorisch induzierte, 27  
 Spannungsgleichung  
   eines magnetisch gekoppelten Spulenpaars, 41  
   für bewegten Leiterkreis, 28  
 Spannungsteilerregel  
   für Impedanzen, 41  
   für Kondensatoren, 16  
   für Widerstände, 7  
 Sprungstellenverfahren  
   zur Fourier-Reihe, 38  
 Spule  
   Strom-Spannungs-Verhalten, 34  
 Spulenfluss  
   magnetischer, 23  
 Spulenpaar  
   Gegeninduktivität, 29  
   Strom-Spannungs-Verhalten, 34  
 Stern-Dreieck-Umwandlung  
   mit Admittanzen, 42  
   mit Leitwerten, 7  
 Sternschaltung  
   Leiter- und Stranggrößen, 48  
 Stoffwerte (Tabelle), 74  
 Stokes'scher Integralsatz, 64  
 Streukoeffizient  
   magnetischer  
   zweier Spulen, 29  
 Strömungsfeld  
   elektrisches, 19  
 Stromdichte  
   elektrische, 19  
   aus Stromstärke, 19  
 Stromstärke  
   elektrische, 5  
   im Strömungsfeld, 19  
 Stromteilerregel  
   für Admittanzen, 42  
   für Leitwerte, 7  
 Suszeptanz, 41  
 Suszeptibilität  
   elektrische, 12  
   magnetische, 23  
 Tabellen-Anhang, 69  
 Temperaturbeiwert  
   des Widerstands, 7  
 Überlagerungssatz  
   für Netzwerke, 9  
 Umlaufintegral, 60  
 Umlaufspannung  
   elektrische, 28  
   magnetische, 26  
 Umlaufsumme, 6, 28  
 Vektor, 56  
 Vektorpotenzial

- magnetisches, 23
    - einer kleinen Leiterschleife, 25
    - einer Leiterschleife, 25
    - eines magnetisierbaren Körpers, 26
    - eines Strömungsgebietes, 25
- Vektorprodukt, 57
- Verbraucherpfleilsystem, 9
- Verhältnisgrößen
  - Zeichen für (Tabelle), 69
- Verkettungsfluss
  - magnetischer, 23
- Verschiebung
  - elektrische, *siehe* Flussdichte, elektrische
- Verschiebungsblindleistung, 45
- Vorsatzzeichen
  - für dezimale Teile und Vielfache (Tabelle), 73
- VS, *siehe* Verbraucherpfleilsystem
- Wärmebilanzgleichung, 68
- Wärmelehre-Anhang, 68
- Wärmestrom, 68
- Wärmewiderstand, 68
  - bei Konvektion, 68
  - einer Kugelschale, 68
  - einer Parallelschaltung, 68
  - einer Reihenschaltung, 68
  - einer Zylinderschale, 68
  - eines Stabes, 68
- Wechselanteil, 37
- Wechselgröße, 37
- Widerstand
  - elektrischer, 5
    - differentieller, 5
    - eines stabförmigen Leiters, 7
    - im Strömungsfeld, 20
    - spezifischer, 19
    - Strom-Spannungs-Verhalten, 34
  - magnetischer
    - Definition, 30
    - eines stabförmigen Magnetkreisabschnittes, 30
- Winkelbeschleunigung, 66
- Winkelgeschwindigkeit, 66
- Wirbelfreiheit
  - des elektrischen Strömungsfelds, 20
  - des elektrostatischen Felds, 13
- Wirk-Blind-Zerlegung, 43
- Wirkleistung
  - bei Drehstrom, 48
  - bei harmonischen Größen, 44
  - bei periodischen Größen, 39
  - Definition, 35
- Wirkleitwert, 40
- Wirkspannung, 44
- Wirkstrom, 43
- Wirkungsgrad, 6
- Wirkwiderstand, 40
- Zählpfeil, *siehe* Bezugspfeil
- Zeiger, 58
- Zerlegung
  - eines Vektors, 57
  - Wirk-Blind, 43
    - der Spannung, 44
    - des Stroms, 43
- ZP, *siehe* Zweipol
- Zweipol, 5, 6, 9, 34, 40, 42, 45
  - aktiver linearer, 8